RÉSUMÉ DU PROGRAMME DE RECHERCHE

LOUIS MERLIN

[1]

Le tout premier problème mathématique auquel je me suis intéressé est un problème inverse : peut on reconstruire une métrique riemannienne à partir de la dynamique de son flot géodésique ? Ou plutôt quelles sont les informations géométriques que contient la dynamique ? Une première approche (naïve) suggère une réponse positive : le flot connait toutes les longueurs des géodésiques fermées (les périodes du flot) et cela permet de caractériser une unique métrique.

La conjecture d'entropie minimale est une profonde amélioration de ce procédé de reconstruction d'une métrique riemannienne. On suppose cette fois que l'on connait seulement un invariant de la dynamique, son entropie. Et on suppose aussi que la structure différentiable sur laquelle vit le flot supporte une métrique de référence, une métrique symétrique. Peut on alors reconnaître la géométrie symétrique uniquement avec l'entropie de son flot ? En m'appuyant sur l'influent article, [BCG95], j'ai démontré pendant ma thèse le résultat suivant.

Théorème 1 ([Mer16])**.** *Soit (M, g_0) une métrique riemannienne complète, localement isométrique à un produit de plans hyperboliques $\left(\mathbb{H}^2\right)^n$ et soit g une autre métrique quelconque sur M. Alors*

$$h(g_0)^{2n}\,\mathrm{Vol}(g_0) \leqslant h(g)^{2n}\,\mathrm{Vol}(g)$$

où $h(g)$ est l'entropie de la métrique g et $\mathrm{Vol}(g)$ son volume.

La preuve est basée sur des techniques qui viennent de la théorie des surfaces minimales et de cohomologie bornée.

Mon activité de recherche principale consiste en l'étude d'invariants globaux des variétés riemanniennes, comme l'entropie ou le volume; mais aussi la systole, la constante de Margulis, le "filling radius", l'ensemble limite du groupe fondamental ou la cohomologie (bornée)... Les espaces symétriques jouent un rôle prépondérant. Plus récemment, l'environnement géométrique limité aux seules variétés riemanniennes est devenu trop étroit et je m'intéresse aussi à des situations purement métriques, comme la géométrie de Hilbert (abordée avec des outils de théorie de la mesure) ou la géométrie des immeubles affines (abordée avec des outils de théorie géométrique des groupes). Le genre de questions qui me fascinent sont les phénomènes de rigidité/flexibilité : quel objet mathématique est rigide (et pourquoi ?) et quel autre et flexible (et jusqu'à quel point ?).

Ces trois aspects de mes motivations scientifiques (invariants globaux des variétés riemanniennes, géométrie métrique et les phénomènes de rigidité/flexibilité) sont les trois lignes directrices de mon programme de recherche. J'en décris maintenant les projets les plus excitants.

Dans un travail en cours et en commun avec F. Balacheff, nous étudions les propriétés dynamiques et géométriques des groupes libres (Schottky) agissant sur le plan hyperbolique. Cela fait suite à notre travail [BM19]. Nous obtenons la première formule explicite de la dimension de Hausdorff de l'ensemble limite d'un groupe de Schottky. Les applications sont nombreuses : cela nous donne par exemple des outils pour étudier la régularité de l'entropie pour des perturbations $\mathcal{C}^0$ de la métrique. C'est d'ailleurs une partie d'un autre projet en cours avec M. Alvès, L. Dahinden et M. Miewes.

Revenant à la conjecture d'entropie minimale, même si un énoncé qui impliquerait un espace symétrique générique semble pour l'instant hors d'atteinte, il y a deux cas où on peut développer une stratégie.

[1] Une version complète de ce programme de recherche avec des énoncés et des stratégies précises est aussi disponible.

L'espace de Siegel a beaucoup de sa géométrie en commun avec $(\mathbb{H}^2)^n$. Quelques ressemblances cohomologiques permettent d'envisager de réutiliser la preuve du théorème 1 dans ce cas. Un projet plus ambitieux (puisqu'il contient le cas de l'espace de Siegel) serait de s'attaquer aux espaces symétriques hermitiens. En effet, la structure symplectique additionnelle qui vient de la géométrie complexe trouve une place naturelle dans la stratégie de preuve. Elle permet en effet de mettre en évidence des sous-variétés minimales.

Les géométries de Hilbert sont des déformations projectives de la géométrie hyperbolique. Elle sont naturellement métrisées par une distance Finslérienne. L'espace métrique consiste en fait en une distance invariante par transformations projectives sur un convexe de $\mathbb{RP}^n$. Dans un travail en collaboration avec J. Cristina [CM16], nous développons des techniques de théorie géométrique de la mesure pour étudier des géométries de Hilbert de basse régularité (c'est-à-dire quand le bord du convexe n'est pas lisse). Ces techniques sont largement réutilisables et l'étude de ces géométries de Hilbert de basse régularité n'en est qu'à ses débuts. Nos outils sont pensés pour étudier des propriétés de croissance dans ces convexes (du volume des boules, de la taille d'un polyèdre d'approximation...)

Dans un projet en cours et en collaboration avec J-M Schlenker, nous étudions certains cas du "problème de Weyl", qui consiste à décider si, étant donnée une métrique riemannienne sur une surface (avec des conditions adéquates de courbure), on peut la réaliser (de manière unique ?) comme la métrique induite sur une surface plongée dans $\mathbb{H}^3$ et/ou AdS^3. Nous étudions le cas lorentzien dans [MS20] et une partie de nos techniques s'adapte pour le cas hyperbolique.

References

[BCG95] G. Besson, G. Courtois, and S. Gallot. Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative. *Geom. Funct. Anal.*, 5(5):731–799, 1995.

[BM19] Florent Balacheff and Louis Merlin. Volume entropy and lengths of homotopically independent loops, 2019.

[CM16] J. Cristina and L. Merlin. On the entropy of Hilbert Geometries of Low Regularities. *ArXiv e-prints*, December 2016.

[Mer16] Louis Merlin. Minimal entropy for uniform lattices in product of hyperbolic planes. *Comment. Math. Helv.*, 91(1):107–129, 2016.

[MS20] Louis Merlin and Jean-Marc Schlenker. Bending laminations on convex hull of anti-de sitter quasicircles, 2020.