TD9

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES, VARIABLES ALÉATOIRES À DENSITÉS.

Exercice 1.- **EDHEC** 2021 Exercice 2.

Toutes les variables aléatoires rencontrées dans cet exercice sont supposées définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. **a.** Vérifier que la fonction f qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire Y.

b. On note F la fonction de répartition de Y. Déterminer $F(x)$ selon que $x > 0$ ou $x \leqslant 0$.

2. **a.** Vérifier que la fonction g qui à tout réel x associe $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$ peut être considérée comme une densité d'une certaine variable aléatoire X.

b. On note G la fonction de répartition de X. Déterminer $G(x)$ selon que $x \geqslant 1$ ou que $x < 1$.

3. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de variables mutuellement indépendantes et suivant toutes la même loi que X.

Pour tout entier naturel non nul, on pose $M_n = \max(X_1, \cdots, X_n)$ et on admet que M_n est une variable aléatoire à densité, définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

a. On note G_n la fonction de répartition de M_n. Exprimer $G_n(x)$ à l'aide de la fonction G puis en déduire explicitement $G_n(x)$ en fonction de x.

b. On pose $Y_n = \frac{M_n}{\sqrt{n}}$. Justifier que la fonction de répartition F_n de Y_n est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n & \text{si } x \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}} \\ 0 & \text{si } x < \frac{1}{\sqrt{n}} \end{cases}.$$

4. Déterminer, pour tout réel x négatif ou nul, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

5. **a.** Soit x un réel strictement positif. Vérifier que, dès que n est strictement supérieur à la partie entière de $\frac{1}{x^2}$, on a : $F_n(x) = \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n$.

b. Déterminer un équivalent de $\ln(1+u)$ lorsque u est au voisinage de 0, puis en déduire, pour tout réel x strictement positif, la limite de $F_n(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6. **cubes ou dans une semaine.** Conclure que la suite $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont la loi est celle de Y.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 2.- EDHEC 2021 Exercice 1.

Soit la fonction de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R},\ f(x.y)=x^3+y^3-3xy.$$

Partie 1.

1. Justifier que f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b. Déterminer les points critiques de f.

3. a. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b. Vérifier que f ne présente un extremum local qu'en un seul de ses points critiques et préciser sa nature et sa valeur.

4. Cet extremum est-il global.

Partie 2.

On note g la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\ g(x)=f(x,1).$$

5. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 4, l'équation $g(x)=n$, d'inconnue x possède une unique solution que l'on notera u_n.

6. On note h la restriction de g à $[1,+\infty[$.

a. Dresser le tableau de variations de h^{-1}.

b. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

c. En déduire en revenant à la définition de u_n, le réel α pour lequel on a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n^\alpha$.

Exercice 3.- EDHEC 2021 Exercice 3.

On considère un nombre réel a élément de $]0,1[$ et l'endomorphisme f_a de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est

$$M_a=\begin{pmatrix}1&0&0\\1-a&a&0\\0&1-a&a\end{pmatrix}$$

1. a. Donner les valeurs propres de M_a.

b. Déterminer les sous-espaces propres associés à ces valeurs propres.

c. En déduire que M_a n'est pas diagonalisable.

2. On pose $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et on note E l'espace vectoriel engendré par I, M_a et M_a^2.

a. Quelle est la dimension de E ?

b. On pose $J=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$ et $K=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}$.

Calculer JK^2 puis en déduire $(M_a-I)(M_a-aI)^2$.

c. En déduire que M_a^3 appartient à E.

3. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I.$$
On donnera les valeurs de u_0, v_0 et w_0, et on écrira les relations liant u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} à u_n, v_n et w_n.

b. En utilisant les relations précédentes, expliquer pourquoi le script Python qui suit ne permet pas de calculer et d'afficher les valeurs de u_n, v_n et w_n lorsque n et a sont entrés par l'utilisateur. On pourra examiner attentivement la boucle "for".

```python
n=input('entrez une valeur pour n :')
a=input('entrez une valeur pour a :')
u=0
v=0
w=1
for k in range(n):
  u=(2*a+1)*u+v
  v=-a*(a+2)*u+w
  w=a*a*u

print(w,v,u)
```

c. Modifier la boucle de ce script en conséquence.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On **admet** que l'on peut en déduire u_n, pour tout entier naturel n, sous la forme
$$u_n = \frac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}.$$

5. On dit qu'une suite de matrices $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers la matrice A lorsque n tend vers $+\infty$ si chaque coefficient de A_n tend vers le coefficient situé à la même place dans A.

Il en résulte (et on admet ce résultat) que $\lim\limits_{n\to+\infty} M_a^n = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n\right) M_a^2 + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} v_n\right) M_a + \left(\lim\limits_{n\to+\infty} w_n\right) I$.

a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$.

b. En déduire la limite L_a lorsque n tend vers $+\infty$ de la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

c. Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

6. On note φ_a l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est L_a. Montrer que

a. $\forall x \in \mathrm{Ker}(f_a - Id)$, $\varphi_a(x) = x$.

b. $\forall x \in \mathrm{Im}(f_a - Id)$, $\varphi(x) = 0$.