TD8

UNE CHAÎNE DE MARKOV, UN SYSTÈME DIFFÉRENTIEL.

Exercice 1.- d'après **ESSEC** 1995 Exercice 1.

On étudie dans cet exercice une situation probabiliste décrite dans la question **4.**. Les deux premières questions ont pour but d'étudier les puissances de la matrice carrée d'ordre 10 définie par

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & \cdots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \cdots & b & a \end{pmatrix}$$

où a et $b (b \neq 0)$ désignent des nombres réels.

1. Recherche des matrices telles que $M(a,b)^2 = M(a,b)$

- **a.** Exprimer $M(a,b)^2$ comme combinaison linéaire de $M(a,b)$ et de I_{10} où I_{10} désigne la matrice identité d'ordre 10.
- **b.** Déterminer les couples (a,b) avec $b \neq 0$ tels que $M(a,b)^2 = M(a,b)$.

2. Calcul des puissances de $M(a,b)$**.** On considère les matrices $P = M\left(\frac{1}{10}, \frac{1}{10}\right)$ et $Q = I_{10} - P$.

- **a.** Calculer P^2, Q^2, PQ et QP. En déduire les puissances de P^k et Q^k pour $k \geqslant 1$.
- **b.** Exprimer $M(a,b)$ comme combinaison linéaire de P et de Q et en déduire $M(a,b)^n$ comme une combinaison linéaire des matrices P et Q. Expliciter enfin la matrice $M(a,b)^n$.

3. Limite des puissances de $M(1-9b, b)$ **pour** $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{9}$**.** On suppose que a et b dont des nombres réels positifs tels que $a + 9b = 1$ (donc $a = 1 - 9b$). On dit que la suite des matrices $M(a,b)^n$ converge vers une matrice L lorsque tous les coefficients de $M(a,b)^n$ convergent vers les coefficients respectifs de L quand n tend vers $+\infty$.

- **a.** Déterminer la matrice limite L de la suite $M(a,b)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- **b.** Exprimer la matrice L comme combinaison linéaire des matrices P et Q.

4. Étude des déplacements des pions sur un damier. On considère un damier à 10 cases numérotées 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. On considère les déplacements d'un pion situé à l'instant 0 sur la case 0 et à l'instant n sur une case dont le numéro est une variable aléatoire X_n.

On fait enfin les hypothèses suivantes, concernant les déplacements du pion : si à l'instant n le pion est sur la case k $(0 \leqslant k \leqslant 9)$, il se trouve encore sur la case k à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1/2$ et sinon, il se trouve de façon équiprobable sur toutes les autres cases.

- **a.** Pour tout entier j compris entre 0 et 9, exprimer la probabilité $P(X_{n+1} = j)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$, $\cdots$, $P(X_n = 9)$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

On note V_n le vecteur-colonne dont les composantes sont, de haut en bas, les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = 9)$.

Déterminer une matrice carrée d'ordre 10 telle que $V_{n+1} = MV_n$.

b. Calculer en fonction de n les probabilités $P(X_n = 0), P(X_n = 1), \cdots, P(X_n = 9)$, puis leurs limites quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 2.- EML 2023 sujet 0 Exercice 1.

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Le but de cette question est de diagonaliser A.

a. Justifier que la matrice A est de rang 1.

b. En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

c. Justifier que 6 est valeur propre de A et qu'un vecteur propre associé est $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

d. Déterminer une matrice inversible P et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^{-1}$.

2. Résoudre le système différentiel :

$$(SH) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - z \\ y' & = & 2x + 4y - 2z \\ z' & = & -x - 2y + z \end{array} \right. .$$

3. Soient $X_1 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \\ z_1(t) \end{pmatrix}$ et $X_2 : t \mapsto X_1(t) = \begin{pmatrix} x_2(t) \\ y_2(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}$ deux solutions du système (SH).

On suppose qu'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ vérifiant $X_1(t_0) = X_2(t_0)$. Que pouvez-vous dire de X_1 et X_2.

4. **a.** Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

b. Déterminer la solution $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ du système (SH) vérifiant $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5. Dans cette question, on considère trois fonctions continues $a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et on s'intéresse au système différentiel

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & x + 2y - z + a(t) \\ y' & = & 2x + 4y - 2z + b(t) \\ z' & = & -x - 2y + z + c(t) \end{array} \right. ,$$

où x, y et z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, inconnues, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de la variable réelle t.

Une solution de (S) est une application $X : t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ où x, y et z sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel t, on ait

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & x(t) + 2y(t) - z(t) + a(t) \\ y'(t) & = & 2x(t) + 4y(t) - 2z(t) + b(t) \\ z'(t) & = & -x(t) - 2y(t) + z(t) + c(t) \end{array} \right. .$$

a. Préciser quel vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dépendant de la variable réelle t permet d'écrire le système (S) sous la forme

$$(S) \quad X' = AX + B(t).$$

b. Soit Y une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de (S). Démontrer que $X : t \mapsto X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$ si et seulement si $Z : t \mapsto X(t) - Y(t)$ est solution de (SH) sur $\mathbb{R}$, (SH) désignant le système de la question **2.**

c. Dans cette question, on pose, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $a(t) = 1$, $b(t) = 2(1 - e^t)$ et $c(t) = e^t - 1$.

Démontrer que $Y : t \mapsto Y(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution de (S) sur $\mathbb{R}$.

En déduire toutes les solutions du système différentiel (S) sur $\mathbb{R}$.

Mathématiques appliquées - Sujet zéro 1

Exercice 1

Partie 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est A.

1. Déterminer le rang de $A - 6I_3$.
   En déduire une valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé.
2. Soit $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $U = AV - 2V$.
   Montrer que U est un vecteur propre de A et déterminer la valeur propre associée.
3. Posons $W = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   (a) Montrer que (U, V, W) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Donner la matrice B de f dans cette base.
   (c) Montrer alors qu'il existe une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$ et expliciter la matrice P. On ne cherchera pas P^{-1}.
4. La matrice A est-elle inversible ? La matrice A est-elle diagonalisable ?

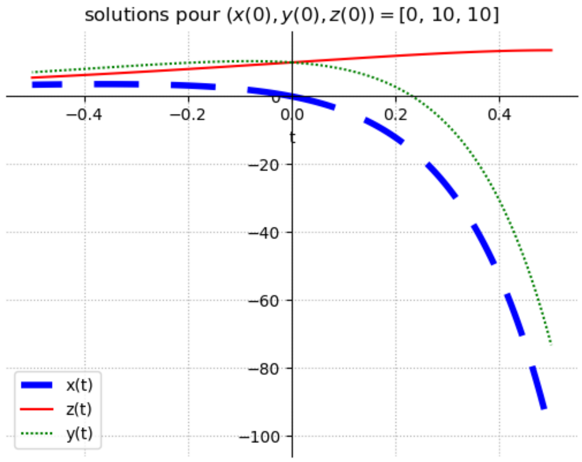
Partie 2

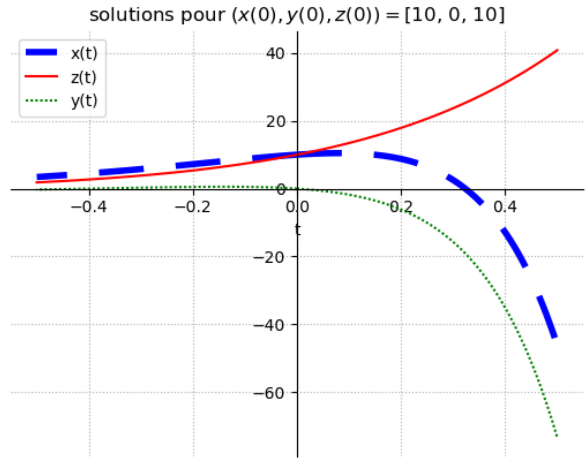
On considère le système différentiel suivant :

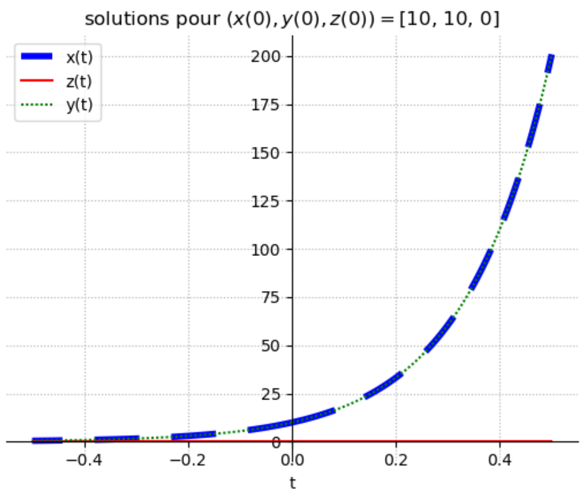
$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x'(t) &= 5x(t) + y(t) - 4z(t), \\ y'(t) &= 3x(t) + 3y(t) - 4z(t), \\ z'(t) &= x(t) - y(t) + 2z(t). \end{cases}$$

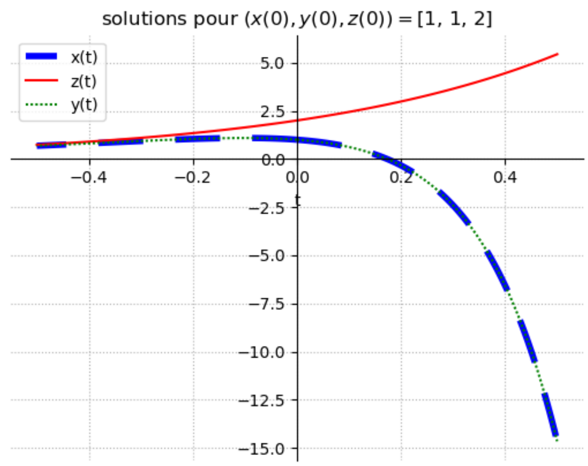
où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On note pour tout réel t : $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$.

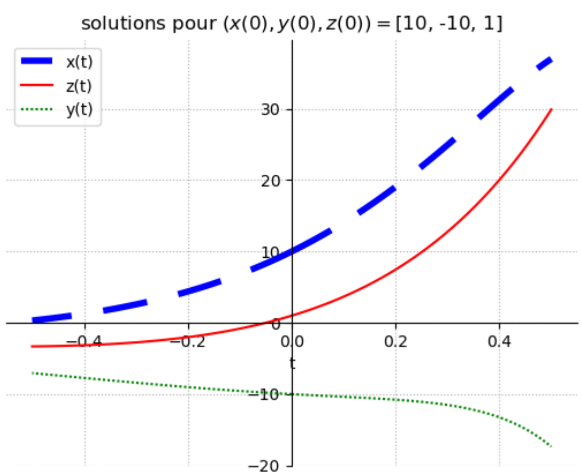
5. En utilisant le module `scipy.integrate` de Python, on obtient le tracé suivant des solutions du système, en faisant varier les valeurs de $x(0)$, $y(0)$, $z(0)$.

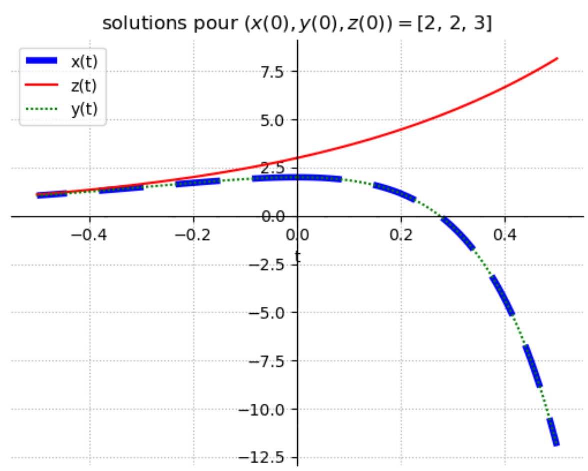












Que peut-on conjecturer quand $x(0) = y(0)$?

6. Montrer que pour tout réel t : $X'(t) = A\,X(t)$.
7. On note pour tout réel t : $Y(t) = P^{-1}X(t)$. On admet que pour tout réel t, $Y'(t) = P^{-1}X'(t)$.
   Montrer que pour tout réel t : $Y'(t) = B\,Y(t)$.

8. (a) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 6\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_1)$$

(b) Donner les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) \qquad (\mathscr{E}_2)$$

(c) Soit c un réel.
Montrer que la fonction $t \longmapsto cte^{2t}$ est une solution de l'équation différentielle $\mathscr{E}_3$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \varphi'(t) = 2\varphi(t) + ce^{2t} \qquad (\mathscr{E}_3)$$

Déterminer toutes les solutions de $(\mathscr{E}_3)$.

9. En notant, pour tout réel t, $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha(t) \\ \beta(t) \\ \gamma(t) \end{pmatrix}$, montrer que γ est solution de $(\mathscr{E}_1)$, β est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et α est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

10. Montrer qu'il existe trois réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_1 + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ y(t) & = & 2(\lambda_1 t + \lambda_2)e^{2t} + \lambda_3 e^{6t} \\ z(t) & = & (2\lambda_1 t + \lambda_1 + 2\lambda_2)e^{2t} \end{array} \right.$$

11. En déduire, en notant $x_0 = x(0)$, $y_0 = y(0)$ et $z_0 = z(0)$, que :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(x_0 - y_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ y(t) & = & \left((x_0 - y_0)t + z_0 + \dfrac{1}{2}(y_0 - x_0)\right) e^{2t} + \left(\dfrac{1}{2}(x_0 + y_0) - z_0\right) e^{6t} \\ z(t) & = & \Big((x_0 - y_0)t + z_0\Big)e^{2t} \end{array} \right.$$

12. Justifier la conjecture faite à la question 5.