**TD6**

RÉDUCTION DES MATRICES.

**Exercice 1.- ECRICOME** 2013.

On désigne par $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de taille 3 à coefficients réels et par $O_3$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -9 & 6 \end{pmatrix}$ , $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, ainsi que le polynôme $R$ défini pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$R(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 3.$$

Pour tout réel $\lambda$, on pose $X_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Pour finir, on introduit l'application $f$ définie par : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = AM + MA$.

**1.** Montrer que $R'$ (la dérivée de $R$) admet deux racines réelles distinctes $r_1, r_2$ avec $r_1 < r_2$ que l'on précisera.

**2.** Dresser le tableau de variations de $R$ en y ajoutant les valeurs de $R$ en $r_1$ et $r_2$ .

**3.** Justifier que $R$ admet trois racines $a, b, c$ avec $0 < a < r_1 < b < r_2 < c$.

*On ne cherchera pas à calculer ces racines.*

**4.** Soit $\lambda$ un réel, calculer $AX_\lambda$ puis démontrer que $X_\lambda$ est un vecteur propre de $A$ associé à la valeur propre $\lambda$ si et seulement si $R(\lambda) = 0$.

**5.** Établir l'existence d'une matrice inversible $P$ et d'une matrice diagonale $D$ telles que $A = PDP^{-1}$ .

Expliciter les matrices $P$ et $D$ en fonction des réels $a, b, c$.

**6.** Prouver que $f$ est une application linéaire et que : $\forall M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $f(M) = O_3 \iff DM' + M'D = O_3$

où l'on a posé $M' = P^{-1}MP$.

**7.** Soit $N = \begin{pmatrix} p & q & r \\ s & t & u \\ v & w & x \end{pmatrix}$. Déterminer les neuf coefficients de la matrice $DN + ND$.

Que dire de $N$ si $DN + ND = O_3$ ?

**8.** Démontrer que $f$ est un isomorphisme.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

**Exercice 2.- ECRICOME** 2016.

**Partie A.** Pour tout couple de réels $(x, y)$, on définit la matrice $M(x, y)$ par :
$$M(x,y) = \begin{pmatrix} 3x & -2x+2y & 2x-y \\ -x-y & 4x-3y & -2x+y \\ -2y & 4x-4y & -x+y \end{pmatrix}$$
On appelle $E$ l'ensemble des matrices $M(x, y)$ où $x$ et $y$ décrivent $\mathbb{R}$ :
$$E = \left\{ M(x,y), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
On note $A = M(1, 0)$ et $B = M(0, 1)$.

**1.** Montrer que $E$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En déterminer une base et donner sa dimension.

**2.** Montrer que 1, 2 et 3 sont valeurs propres de $A$ et déterminer les espaces propres associés. $A$ est-elle diagonalisable ?

**3.** Déterminer une matrice inversible $P$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, et telle que :
$$A = PD_AP^{-1} \qquad \text{où} \qquad D_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**4.** Déterminer $P^{-1}$ (faire figurer le détail des calculs sur la copie).

**5.** En notant $X_1$, $X_2$ et $X_3$ les trois vecteurs colonnes formant la matrice $P$, calculer $BX_1$, $BX_2$ et $BX_3$.
En déduire l'existence d'une matrice diagonale $D_B$ que l'on explicitera telle que :
$$B = PD_BP^{-1}.$$

**6.** En déduire que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe une matrice diagonale $D(x, y)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :
$$M(x,y) = PD(x,y)P^{-1}.$$

**7.** En déduire une condition nécessaire et suffisante sur $(x, y)$ pour que $M(x, y)$ soit inversible.

**8.** Montrer que $B^2$ est un élément de $E$. La matrice $A^2$ est-elle aussi un élément de $E$ ?

**Partie B.** On souhaite dans cette partie étudier les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par les conditions initiales $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $c_0 = 0$ et les relations de récurrence suivantes :
$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4b_n - c_n \\ b_{n+1} = -4a_n - 5b_n + c_n \\ c_{n+1} = -6a_n - 8b_n + 2c_n \end{cases}$$
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

**9.** Que vaut $X_0$ ?

**10.** Déterminer une matrice $C$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait :
$$X_{n+1} = CX_n.$$
Déterminer ensuite deux réels $x$ et $y$ tels que $C = M(x, y)$.

**11.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C^nX_0$.

**12.** À l'aide des résultats de la partie A, exprimer $a_n$, $b_n$ et $c_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 3.- EMLyon** 2015, un peu plus dur.
Soit $E$ un espace vectoriel de dimension 3. On note $0_E$ le vecteur nul de $E$.
On note $i$ l'application identité de $E$, et $\theta$ l'application constante nulle de $E$ dans $E$ : $i : E \longrightarrow E, x \longmapsto x$ et $\theta : E \longrightarrow E, x \longmapsto 0_E$.
On considère un endomorphisme $f$ de $E$ tel que :

$$f \neq \theta, f^2 + i \neq \theta, f \circ (f^2 + i) = \theta$$

où $f^2$ désigne $f \circ f$.

**1. a.** Montrer que $f$ n'est pas bijectif.

**b.** En déduire que 0 est valeur propre de $f$, puis montrer qu'il existe $u$ appartenant à $E$ tel que : $u \neq 0_E$ et $f(u) = 0_E$.

Soit $v_1$ appartenant à $E$ tel que : $v_1 \neq 0_E$ et $f(v_1) = 0_E$.

**2.** Montrer : $\mathrm{Sp}(f) = \{0\}$.

**3.** Est-ce que $f$ est diagonalisable ?

**4.** Montrer que $f^2 + i$ n'est pas bijectif, puis en déduire qu'il existe $v$ appartenant à $E$ tel que : $v \neq 0_E$ et $f^2(v) = -v$.

Soit $v_2$ appartenant à $E$ tel que : $v_2 \neq 0_E$ et $f^2(v_2) = -v_2$. On note $v_3 = f(v_2)$.

**5.** Montrer : $f(v_3) = -v_2$.

**6. a.** Montrer que la famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $E$.

**b.** Déterminer la matrice $C$ de $f$ dans la base $\mathcal{B}$.

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et le sous-espace vectoriel $\mathcal{F}$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par $(A, B, C)$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{F} = \{aA + bB + cC ; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}.$$

**7.** Déterminer la dimension de $\mathcal{F}$.

**8.** Montrer : $\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) ; CM = MC\} = \mathcal{F}$

**9. a.** Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer la matrice $(aA + bB + cC)^2$.

**b.** En déduire une matrice $M$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que : $M^2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -12 \\ 0 & 12 & 5 \end{pmatrix}$.

**10.** On note $g = f^2 - i$.
Montrer que $g$ est bijectif et exprimer $g^{-1}$ à l'aide de $f$ et de $i$.