**TD5**

INTÉGRATION, UN EXERCICE DE SÉRIES.

**Exercice 1.-** Une suite définie par une intégrale.

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^1 \frac{1}{x^n+1}\,dx.$$

**1.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
**2.** Calculer $I_0$ et $I_1$.
**3.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
**4.** Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
En déduire qu'elle converge.
**5.** **a.** Montrer que : $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 - x^n \leq \dfrac{1}{x^n+1}$.
**b.** En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 1 - \frac{1}{n+1} \leq I_n \leq 1$$

**6.** En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

**Exercice 2.- ECRICOME** 2002.
On considère la famille de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies sur $]-1,+\infty[$ par :

$$f_n(x) = x^n \ln(1+x).$$

**Étude des fonctions $f_n$.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $h_n$ la fonction définie sur $]-1,+\infty[$ par :

$$h_n(x) = n\ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

**1.** Étudier le sens de variation des fonctions $h_n$.
**2.** Calculer $h_n(0)$, puis en déduire le signe de $h_n$.
**3.** Étude du cas particulier $n = 1$.
**a.** Après avoir justifié la dérivabilité de $f_1$ sur $]-1,+\infty[$, exprimer $f_1'(x)$ en fonction de $h_1(x)$.
**b.** En déduire les variations de la fonction $f_1$ sur $]-1,+\infty[$.
**4.** Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
**a.** Justifier la dérivabilité de $f_n$ sur $]-1,+\infty[$ et exprimer $f_n'(x)$ en fonction de $h_n(x)$.
**b.** En déduire les variations de $f_n$ sur $]-1,+\infty[$. (On distinguera les cas $n$ pair et $n$ impair). On précisera les limites aux bornes.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

**Étude d'une suite.** On considère la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$U_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx.$$

*Calcul de $U_1$.*

**1.** Prouver l'existence de trois réels $a$, $b$, $c$ tels que : $\forall x \in [0,1]$, $\quad \dfrac{x^2}{x+1} = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$.

**2.** En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$.

**3.** Montrer que $U_1 = \dfrac{1}{4}$.

*Convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.*

**1.** Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est monotone.

**2.** Justifier la convergence de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. (On ne demande pas sa limite.)

**3.** Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant U_n \leqslant \frac{\ln 2}{n+1}.$$

**4.** En déduire la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

*Calcul de $U_n$ pour $n \geqslant 2$.* Pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on pose :

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

**1.** Montrer que :

$$S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}.$$

**2.** En déduire que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}\,dx.$$

**3.** En utilisant une intégration par parties dans le calcul de $U_n$, montrer que :

$$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^k}{k+1} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right].$$

**Exercice 3.- EMLyon** 2000.

On considère la fonction $f : ]-1;+\infty[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x$ de $]-1;+\infty[$, par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \in ]-1;0[ \cup ]0;+\infty[ \end{cases}$$

**1.** **a.** Montrer que $f$ est continue sur $]-1;+\infty[$.

**b.** Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$
Pour tout réel $x$ de $]-1;0[ \cup ]0;+\infty[$, calculer $f'(x)$

**c.** Montrer que $f$ est dérivable en 0 et donner la valeur de $f'(0)$.

**d.** Montrer que $f'(x)$ tend vers $-\dfrac{1}{2}$ lorsque $x$ tend vers 0.

**e.** En déduire que $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.

**2.** Montrer : $\forall x \in \left]-1;+\infty\right[, \dfrac{x}{x+1} - \ln(1+x) \leqslant 0$

En déduire les variations de $f$ . On précisera les limites de $f$ en $-1$ et $+\infty$.

**3.** Montrer que, pour tout $x \in \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, l'intégrale $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$ existe.

**4.** On considère la fonction $F\colon \left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[ \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x$ de $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$, par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt$.

**a.** Montrer que $F$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et que $F$ est croissante.

**b.** Montrer que $\forall x \in \left]0;+\infty\right[, F(x) \geqslant xf(2x)$.

**c.** En déduire que $F(x)$ tend vers $+\infty$ quand $x$ tend vers $+\infty$.

**d.** Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f(t)\,dt$ est convergente.

En déduire que la fonction $F$ admet une limite finie en $-\dfrac{1}{2}$. On ne cherchera pas à calculer cette limite.

**Exercice 4.-** Plus difficile.

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + u_n^2$.

**1.** **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

**b.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

**2.** On pose, pour tout entier naturel $n$, $v_n = \frac{\ln u_n}{2^n}$.

**a.** Montrer que pour tout $t > 0$, $\ln(1+t) \leqslant t$.

**b.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_{n+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^{n+1}u_n}$.

**c.** Montrer que la série de terme général $v_{n+1} - v_n$ est convergente.

**d.** En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. On note $\ell$ sa limite.

**3.** **a.** Montrer à l'aide de la question **2.b** que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant v_{n+p+1} - v_n \leqslant \frac{1}{2^n u_n}.$$

**b.** En déduire que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2^n l}$.