TD4

APPLICATIONS LINÉAIRES, RÉVISIONS PROBAS ECG1.

Exercice 1.- *D'après EDHEC 2006.*
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 7 \\ 1 & 4 & 3 \\ -2 & -8 & -6 \end{pmatrix}.$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $u = (2, 1, -2)$.

1. **a.** Montrer que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(u)$.
   b. La matrice A est-elle inversible ?
2. **a.** Déterminer le vecteur v de $\mathbb{R}^3$ dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et tel que $f(v) = u$.
   b. Démontrer que le vecteur w, dont la 2ème coordonnée dans $\mathcal{B}$ vaut 1 et qui vérifie $f(w) = v$ est le vecteur $w = (0, 1, -1)$.
   c. Montrer que (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ que l'on notera $\mathcal{B}'$. On note P la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Expliciter la matrice P.
3. **a.** Écrire la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{B}'$.
   b. Donner la relation donnant la relation entre les matrices A, N, P et P^{-1}.
   En déduire que pour tout entier k supérieur ou égal à 3, on a $A^k = 0$.
4. On note $\mathcal{C}_N$ (respectivement $\mathcal{C}_A$) l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec N (respectivement avec A).
   a. Montrer que $\mathcal{C}_N$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $\mathcal{C}_A$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b. Montrer que $\mathcal{C}_N = \mathrm{Vect}(I, N, N^2)$.
   c. Établir que $M \in \mathcal{C}_A \Leftrightarrow P^{-1}MP \in \mathcal{C}_N$.
   En déduire que $\mathcal{C}_A = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$.
   Quelle est la dimension de $\mathcal{C}_A$?

Exercice 2.-
Une puce se déplace sur un axe gradué d'origine O par bonds successifs d'une ou deux unités vers la droite en suivant la procédure suivante.

× Au départ, la puce est en O.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

× Si, à un instant, la puce est sur la case d'abscisse k, à l'instant d'après, elle sera soit sur la case d'abscisse $k+1$ avec probabilité $\frac{1}{2}$, soit sur la case $k+2$ avec probabilité $\frac{1}{2}$.

× Les sauts sont indépendants.

1. On note S_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts de deux unités effectués par la puce au cours des n premiers sauts.

Déterminer la loi de S_n, son expérience et sa variance.

2. On note X_n la variable égale à l'abscisse de la puce après n sauts.

Exprimer X_n en fonction de S_n.

En déduire la loi de X_n, son espérance et sa variance.

3. On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, Y_n la variable aléatoire égale au nombre de sauts qu'il a fallu à la puce pour atteindre ou dépasser la case d'abscisse n au cours de n premiers sauts.

a. Déterminer $Y_n(\Omega)$.

b. Montrer que, pour tout $n \geqslant 3$ et tout entier $k \geqslant 1$,

$$\mathbb{P}([Y_n = k]) = \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y_{n-1} = k-1]) + \frac{1}{2}\mathbb{P}([Y_{n-2} = k-1]).$$

c. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 3$,

$$\mathbb{E}(Y_n) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-1}) + \frac{1}{2}\mathbb{E}(Y_{n-2}) + 1.$$

4. Dàterminer un réel a tel que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_n = \mathbb{E}(Y_n) - na$$

vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

Déterminer alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, u_n puis $\mathbb{E}(Y_n)$ en fonction de n.

Exercice 3.-

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. On considère l'application Φ définie par

$$\Phi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \Phi(f) \end{array}$$

où $\Phi(f)$ est la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \ \Phi(f)(x) = \int_0^x f(t)dt.$$

1. Montrer que Φ est un endomorphisme de E.

2. Φ est-il injectif ? surjectif ?

3. Quelle remarque la précédente question inspire-t-elle ?

Exercice 4.- *Suites des noyaux et images itérés (hors programme mais classique)..*

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $n \in \mathbb{N}^*$. On considère f un endomorphisme de E.

Partie I : étude d'un exemple.

On suppose dans cette partie que E est de dimension 3.

1. Montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Ker}(f^2)$ et $\mathrm{Im}(f^2) \subset \mathrm{Im}(f)$.

On suppose dorénavant que f vérifie $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$ et $\mathrm{Ker}(f) \subset \mathrm{Im}(f)$.

2. Montrer que si $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 0$, alors $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Ker}(f)$.
Que peut-on en déduire ?

3. Montrer que si $\dim(\mathrm{Im}(f^2)) = 2$, alors $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Ker}(f^2)$, puis que $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.
Que peut-on en déduire ?

4. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f^2)$ et de $\mathrm{Ker}(f^2)$.

Partie II : noyaux et images itérés.

On revient maintenant au cas général d'un espace vectoriel de dimension quelconque n et d'une application linéaire f quelconque.

1. **a.** Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Ker}(f^i) \subset \mathrm{Ker}(f^{i+1}).$$

b. Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathrm{Im}(f^{i+1}) \subset \mathrm{Im}(f^i).$$

2. Montrer, en considérant les dimensions de $\mathrm{Ker}(f^k)$ pour tout $k \in \{0, \cdots, n\}$ qu'il existe un entier $p \in \{0, \cdots, n\}$ tel que $\mathrm{Ker}(f^p) = \mathrm{Ker}(f^{p+1})$. En déduire qu'alors $\mathrm{Im}(f^p) = \mathrm{Im}(f^{p+1})$.

3. Montrer que pour tout $k \geqslant p$, on a

$$\mathrm{Ker}(f^k) = \mathrm{Ker}(f^p) \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(f^k) = \mathrm{Im}(f^p).$$

4. Montrer que $\mathrm{Ker}(f^p) \cap \mathrm{Im}(f^p) = \{0\}$.