TD3

SÉRIES, DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS.

Exercice 1.- *Convergence de séries.*
Examiner la convergence des séries suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 2} \frac{\ln(k)}{k}$.

2. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{\sqrt{k}}{k+1}$.

3. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{k-2}{k^3+3k-\ln(k)}$.

4. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} (\ln n)^{-\ln n}$.

5. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1} \frac{e^{-\sqrt{k}}}{k}$.

6. $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \sqrt[k]{k+1}-\sqrt[k]{k}$.

Indication : Trouver un équivalent du terme général avec le TAF.

Exercice 2.- *Développements limités.*
Déterminer le développement limité d'ordre 2 au voisinage de x_0 puis calculer la limite proposée :

1. $f(x) = \dfrac{4e^{x-2}}{x^2}$ en $x_0 = 2$ puis $\displaystyle\lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.
En déduire que f est dérivable en $x_0 = 2$ et déterminer $f'(2)$.

2. $g(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ en $x_0 = 1$, puis $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{g(x)+1-x}{(x-1)^2}$.

Indication : se ramener en 0 par un changement de variable : $f(x) = f(2+h) = \dots$ *et* $g(x) = g(1+h) = \dots$

Exercice 3.- *EMLyon 2009 Exercice 1.*
On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{e^x-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie I : Étude d'une fonction.

1. **a.** Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

b. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$.

c. Montrer que

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{-1}{2}.$$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

d. Établir que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

2. **a.** Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
$$u(x) = (1-x)e^x - 1.$$

b. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) < 0$.

c. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$, puis dresser le tableau de variations de f.

d. Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote lorsque la variable tend vers $-\infty$.

e. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in N$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

2. **a.** Établir que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $e^{2x} - 2xe^x - 1 \geqslant 0$.

b. Montrer que, pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) + \frac{1}{2} = \frac{e^{2x} - 2xe^x - 1}{2(e^x-1)^2}$.

c. Montrer que tout $x \in [0, +\infty[$, $-\frac{1}{2} \leqslant f'(x) < 0$.

d. Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \alpha|$.

3. En déduire que pour tout $n \in N$, $|u_n - \alpha| \leqslant \frac{1}{2^n}(1-\alpha)$.

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

5. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$.

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale.
On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'application définie pour tout $x \in \mathbb{R}$, par
$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)dt.$$

1. Montrer que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$G(x) = \begin{cases} \frac{x(3-e^x}{e^{2x}-1} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$$

2. **a.** Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, $0 \leqslant G(x) \leqslant xf(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

b. Montrer que pour tout $x \in]-\infty, 0]$, $G(x) \leqslant xf(x)$.
En déduire la limite de G en $-\infty$.

3. Dresser le tableau de variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 4.- *EDHEC 1997 Exercice 2.*
Soit p un entier naturel fixé. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$u_n = \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$$

1. Montrer que si $p = 0$ ou si $p = 1$, la série de terme général u_n diverge.
On suppose dans toute la suite que p est supérieur ou égal à 2 et on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

2. **a.** Montrer que, pour tout n,
$$(n+p+2)u_{n+2} = (n+2)u_{n+1}.$$

b. En déduire par récurrence sur n que $S_n = \frac{1}{p-1}(1 - (n+p+1)u_{n+1})$.

3. **a.** On pose $v_n = (n+p)u_n$ Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite ℓ est positive ou nulle.

c. Utiliser le résultat précédent pour montrer que la série de terme général u_n converge et donner sa somme en fonction de p et de ℓ.

4. On veut montrer que ℓ est nulle et on raisonne par l'absurde : on suppose donc que $l \neq 0$.

a. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{\ell}{n}$.

b. En déduire une contradiction avec la troisième question.

5. Donner la valeur de ℓ et en déduire en fonction de p, la somme de la série de terme général u_n.