**TD2**

ENCORE DES SUITES, RÉVISIONS D'ALGÈBRE LINÉAIRE ECG1.

**Exercice 1.- ECRICOME** 2008.
À tout couple $(a,b)$ de deux réels, on associe la matrice $M(a,b)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M(a,b)=\begin{pmatrix} a+2b & -b & -2b \\ 2b & a-b & -4b \\ -b & b & a+3b \end{pmatrix}$$

On désigne par $E$ l'ensemble des matrices $M(a,b)$ où $a$ et $b$ décrivent $\mathbb{R}$. Ainsi $E=\left\{M(a,b)\,;(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
On note $I$ la matrice identité et $A$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Enfin, on note $U,V$ et $W$ les vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ suivants :

$$U=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\ ;\ V=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\ ;\ W=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $E$ est un espace vectoriel.
2. Donner une famille génératrice de $E$. Cette famille est-elle libre ?
3. On note $E_1(A)=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid AX=X\}$ et $E_2(A)=\{X\in\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})\mid AX=2X\}$.
   **a.** Montrer que $E_1(A)=\mathrm{Vect}(V,W)$. La famille $(V,W)$ est-elle libre ?
   **b.** Montrer que $E_2(A)=\mathrm{Vect}(U)$. La famille $(U)$ est-elle libre ?
   **c.** Montrer que la famille $\mathcal{B}'=(U,V,W)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   On note $D=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   On admet qu'il existe une matrice $P\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que les matrices $A$, $P$ et $D$ vérifient la relation
   $$D=P^{-1}AP.$$
4. Prouver que la matrice $P^{-1}M(a,b)P$ est une matrice diagonale que l'on notera $D(a,b)$ et que l'on exprimera en fonction des matrices $I$ et $D$.
5. **a.** Montrer que $M(a,b)$ est inversible si et seulement si $D(a,b)$ est inversible.
   **b.** En déduire une condition nécessaire et suffisante portant sur $a$ et $b$ pour que $M(a,b)$ soit inversible.
6. **a.** Prouver que $(M(a,b))^2=I$ si et seulement si $(D(a,b))^2=I$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

**b.** En déduire l'existence de quatre matrices $M(a,b)$ que l'on déterminera vérifiant

$$(M(a,b))^2 = I.$$

**7.** Déterminer une matrice $B$ telle que $B^2 = A$.

*Indication : On exprimera $B$ à l'aide de la matrice $P$ et d'une matrice diagonale à déterminer que l'on explicitera.*

**Exercice 2.-**

Dans tout cet exercice, $f$ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f(x) = x - \ln(x).$$

**Partie I : Étude de la fonction f.**

**1.** Dresser le tableau de variations de $f$ en précisant les limites en 0 et en $+\infty$.

**2.** Montrer que l'équation $f(x) = 2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$ admet exactement deux solutions que l'on note $a$ et $b$, telles que $0 < a < 1 < b$.

**3.** Montrer de plus que $b \in [2,4]$. On donne $\ln 2 \simeq 0,7$.

**Partie II : Étude d'une suite.**

On pose $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \ln(u_n) + 2$. On note alors, pour tout $x > 0$, $\varphi(x) = \ln(x) + 2$.

**1.** Montrer que $\varphi([b,+\infty[) \subset [b,+\infty[$, et que, pour tout $x \in [b,+\infty[$,

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{2}.$$

**2.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [b,+\infty[$.

**3.** Déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En déduire qu'elle converge et calculer sa limite.

**4. a.** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - b \leqslant \frac{1}{2}(u_n - b).$$

**b.** En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leqslant u_n - b \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

**5. a.** Écrire une fonction Python d'en-tête def suite(n) qui, prenant en argument un entier $n \in \mathbb{N}$, renvoie la valeur de $u_n$.

**b.** Recopier et compléter la ligne (3) de la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un réel epsilon strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de $b$ à epsilon près.

```
1 def valeur_approchee(epsilon):
2   n=0
3   while ........... :
4     n=n+1
5   return suite(n)
```

**Exercice 3.-** *EDHEC 2008 Exercice 1.*

Pour tout entier naturel $n$ non nul, on définit la fonction $f_n$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+e^x} + nx.$$

On appelle $(C_n)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité 5cm.

**1. a.** Déterminer, pour tout réel $x$, $f_n'(x)$ et $f_n''(x)$.

**b.** En déduire que la fonction $f_n$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

**2.** **a.** Calculer $\lim_{x\to-\infty} f_n(x)$ ainsi que $\lim_{x\to+\infty} f_n(x)$.

**b.** Montrer que les droites $(D_n)$ et $(D'_n)$ d'équations $y = nx$ et $y = nx + 1$ sont asymptotes à $(C_n)$ en $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

**c.** Déterminer les coordonnées du seul point d'inflexion, noté $A_n$ de $(C_n)$.

**d.** Donner l'équation de la tangente $(T_1)$ à la courbe $(C_1)$ en $A_1$, puis tracer sur un même dessin les droites $(D_1)$, $(D'_1)$ et $(T_1)$ ainsi que l'allure de la courbe $(C_1)$.

**3.** **a.** Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une unique solution sur $\mathbb{R}$ notée $u_n$.

**b.** Montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{-1}{n} < u_n < 0$.

**c.** En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

**d.** En revenant à la définition de $u_n$, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{-1}{2n}$