TD1

SUITES.

Exercice 1.-
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \underset{+\infty}{\sim} n!$$

Exercice 2.- *Probabilités et suites.*
Dans une région imaginaire, les prévisions météo suivent la règle suivante : s'il fait beau un jour donné, il fera beau le lendemain avec la probabilité 0,4, et s'il ne fait pas beau, il ne fera pas beau le lendemain avec la probabilité 0,8. Au 1^{er} jour, il fait beau.

On note B_n l'événement : "il fait beau le n^{e} jour", et sa probabilité $b_n = P(B_n)$.

1. Donner la valeur de b_1.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, exprimer b_{n+1} en fonction de b_n.
3. En déduire b_n en fonction de n.
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

Exercice 3.- *Suites récurrentes d'ordre 1 d'un type non usuel.*
Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite définie par son premier terme $u_1 = 3$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+1} = 2u_n + 5^n$$

On note également : $\alpha_n = \dfrac{u_n}{5^n}$ pour tout $n \geq 1$.

1. Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n. Quelle est la nature de la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 1}$?
2. Déterminer l'expression α_n en fonction de n, puis celle de u_n en fonction de n.
3. En déduire un équivalent de u_n, puis sa limite.

Exercice 4.- *suite récurrente linéaire d'ordre 2.*
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et :

$$\forall n \geqslant 0, \quad u_{n+2} = \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n.$$

1. Résoudre l'équation caractéristique liée à cette suite, puis déterminer l'expression de u_n en fonction de n.
2. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 5.- *ECRICOME 2005 (extrait) : suite $u_{n+1} = f(u_n)$ par IAF.*
On considère la fonction f définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = x^2 - x\ln(x) - 1 \quad \text{et} \quad f(0) = -1.$$

ainsi que les fonctions φ et g définies par :

- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi(x) = \dfrac{2}{x} + \ln(x)$
- $\forall (x;y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x\,;y) = xe^y - ye^x$.

On donne le tableau de valeurs de f :

$x =$	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4
$f(x) \simeq$	$-0,4$	0	$0,6$	$1,6$	3	$4,7$	$6,9$	$9,5$

I. Étude de deux suites associées à f.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2. Étudier la dérivabilité de la fonction f en 0. En donner une interprétation graphique.

3. Étudier la convexité de f sur $\mathbb{R}_+^*$, puis dresser son tableau de variations en précisant la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

4. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur un intervalle J que l'on précisera.

5. Quel est le sens de variation de f^{-1} ? Déterminer la limite de $f^{-1}(x)$ lorsque x tend vers l'infini.

6. **a.** Justifier que pour tout entier naturel k, il existe un unique réel x_k positif tel que $f(x_k) = k$.

b. Donner la valeur de x_0.

c. Utiliser le tableau de valeurs de f pour déterminer un encadrement de x_1 et x_2.

d. Exprimer x_k à l'aide de f^{-1} puis justifier que la suite (x_k) est croissante et déterminer sa limite lorsque k tend vers l'infini.

7. On définit la suite (u_n) par : $u_0 = \dfrac{3}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \varphi(u_n)$

a. Étudier les variations de φ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On donne $\varphi(\frac{3}{2}) \simeq 1,73$ et $\varphi(2) \simeq 1,69$. Montrer que $\varphi\left(\left[\dfrac{3}{2};2\right]\right) \subset \left[\dfrac{3}{2};2\right]$.

c. En étudiant les variations de φ', montrer que : $\forall x \in \left[\dfrac{3}{2};2\right], \quad |\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{2}{9}$.

d. Montrer que les équations $x = \varphi(x)$ et $f(x) = 1$ sont équivalentes. En déduire que le réel x_1 est l'unique solution de l'équation $x = \varphi(x)$.

e. Montrer successivement que pour tout entier n :

$$\frac{3}{2} \leqslant u_n \leqslant 2 \quad ; \quad |u_{n+1} - x_1| \leqslant \frac{2}{9}\,|u_n - x_1| \quad ; \quad |u_n - x_1| \leqslant \left(\frac{2}{9}\right)^n.$$

f. En déduire la limite de la suite (u_n).

II. Recherche d'extremum éventuel de g (Cubes).

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction g.

2. Montrer que si g admet un extremum local en $(a;b)$ de $\mathbb{R}^2$, alors : $\begin{cases} ab = 1 \\ a = e^{a-\frac{1}{a}} \end{cases}$

En déduire que nécessairement $\begin{cases} a > 0 \\ ab = 1 \\ f(a) = 0 \end{cases}$ puis que le seul point où g peut admettre un extremum est le couple $(1;1)$.

3. Calculer les dérivées partielles secondes de la fonction g.

4. La fonction g admet-elle un extremum local sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6.- *ECRICOME 2001 (extrait) : suite implicite.*
On désigne par n un entier naturel non nul et a un réel strictement positif.
On se propose d'étudier les racines de l'équation :

$$(E_n)\ :\ \frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots+\frac{1}{x+2n}=a$$

À cet effet, on introduit la fonction f_n, de la variable réelle x définie par :

$$f_n(x)=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\cdots+\frac{1}{x+2n}-a$$

I. Étude d'un cas particulier. Pour cette question seulement, on prend $a=\dfrac{11}{6}$ et $n=1$.

1. Représenter la fonction f_1 relativement à un repère orthonormal du plan. (unité graphique 2 cm)

2. Calculer $f_1(1)$, puis déterminer les racines de (E_1).
(On donne $\sqrt{37}=6{,}08$ à 10^{-2} près par défaut)

II. Dénombrement des racines de (E_n).

1. Dresser le tableau de variations de f_n.

2. Justifier l'existence de racines de l'équation (E_n) et en déterminer le nombre.

III. Équivalent de la plus grande des racines quand n tend vers $+\infty$. On note x_n la plus grande des racines de (E_n).

1. Justifier que $x_n>0$.

2. Démontrer que pour tout réel $x>1$:

$$\frac{1}{x}<\ln\frac{x}{x-1}<\frac{1}{x-1}$$

En déduire que pour x réel strictement positif :

$$f_n(x)-\frac{1}{x}+a<\ln\left(1+\frac{2n}{x}\right)<f_n(x)-\frac{1}{x+2n}+a$$

puis, que :

$$a-\frac{1}{x_n}<\ln\left(1+\frac{2n}{x_n}\right)<a-\frac{1}{x_n+2n}$$

3. Montrer que pour tout n entier naturel, non nul :

$$x_n>\frac{2n}{e^a-1}$$

4. Quelle est la limite de x_n, puis la limite de $\ln\left(1+\dfrac{2n}{x_n}\right)$, lorsque n tend vers $+\infty$?

5. Prouver enfin l'existence d'un réel δ, que l'on exprimera en fonction de a, tel que l'on ait, au voisinage de l'infini, l'équivalent suivant

$$x_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\delta.n$$