CHAPITRE XIV

CONVERGENCE EN LOI.

Exercice 1.- *Convergence en loi d'une chaîne de Markov.*
Afin de progresser maths, Laure s'entraîne tous les soirs sur un exercice de l'un des trois thèmes du programme (Algèbre linéaire (1), Probabilités (2) ou Analyse (3)). Elle choisit le thème au hasard et ne travaille jamais 2 soirs de suite sur le même thème. Le premier soir, elle commence avec l'Algèbre. On note X_n la variable aléatoire correspondant au thème travaillé le soir n. On note

$$U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}.$$

1. Que vaut U_1.
2. Déterminer la matrice M telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^3$, on ait $U_{n+1} = U_n M$.
3. Diagonaliser M. En déduire M^n puis la loi de X_n
   On pourra montrer que $\mathrm{Sp}(M) = \{1, -1/2\}$.
4. Montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire X à préciser.
5. Vérifier que la loi limite est un état stationnaire.

Exercice 2.-
On considère une suite de variables aléatoires $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ indépendantes et suivant toutes une loi géométrique de paramètre p. On note $M_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} Z_k$.

Exprimer $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(0 \leqslant M_n - \dfrac{1}{p} \leqslant \dfrac{\sqrt{1-p}}{p\sqrt{n}}\right)$ en fonction de $\displaystyle\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$.

Exercice 3.- *Correction de continuité, interpolation linéaire.*

1. Donner une valeur approchée de $\Phi(2,828)$.
2. On considère une variable aléatoire X suivant une loi de Poisson de paramètre 16. Évaluer à l'aide de la table de la loi normale $P(X = 20)$, $P(X \leqslant 20)$ et $P(X \geqslant 20)$.
3. Un dé régulier est lancé 9000 fois. Déterminer la probabilité d'obtenir le résultat 6 entre 1400 et 1600 fois.

   On comparera les résultats obtenus par approximation de loi à l'aide du théorème limite central et par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 4.- *HEC 2003.*
Une compagnie aérienne a vendu n billets pour un vol pouvant accueillir N passagers. On note p la probabilité qu'un passager ne se présente pas à l'embarquement, et on considère que les passagers sont indépendants les uns des autres. On appelle X le nombre de passagers ne se présentant pas à l'embarquement.

1. Déterminer la loi, l'espérance et la variance de X.

2. Dans cette question $p = \dfrac{1}{2}$. On pose $X^* = \dfrac{2X-n}{\sqrt{n}}$.

Par quelle loi peut-on approcher la loi de X^* pour n grand ?

Montrer qu'alors une valeur approchée de $P(X \geqslant N)$ lorsque n est grand est $\Phi\left(\frac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$ où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

3. Dans cette question $p = 0,99$ et n est strictement supérieur à N (situation de surbooking).

Préciser la loi de la variable aléatoire $n - X$.

Par quelle loi de Poisson (en supposant les conditions nécessaires vérifiées), peut-on approcher la loi de $n - X$?

Écrire une valeur approchée de $P(n - X > N)$ sous forme d'une somme.

Exercice 5.- **1.** Justifier qu'il existe un réel t_0 strictement positif vérifiant $\displaystyle\int_{-\infty}^{t_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = 0,99$.

2. Soit Y une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre $5n$ (où n est un entier naturel non nul). Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\left(Y - 5n > t_0\sqrt{5n}\right) = 0,01$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = 0,5$.

Exercice 6.- **1.** En France, sur un échantillon de 100 personnes, 20 ont les yeux bleus. Donner un intervalle de confiance avec un risque d'erreur de 5% de la proportion de Français ayant les yeux bleus.

2. Même question si on veut un risque de 1%.

3. Même question si on a un échantillon de 1000 personnes dont 200 aux yeux bleus, avec un risque de 5%.

Exercice 7.- *Estimateur de la variance.*
Soit X ayant une espérance m et une variance σ^2, $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de X. La **variance empirique** est $W_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X_n}^2$ avec $\overline{X_n}$ la moyenne empirique de X et $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ la moyenne empirique de X^2.

1. Soit Y ayant une espérance et une variance. Calculer $E\left(Y^2\right)$ en fonction $E(Y)$ et $V(Y)$

2. Calculer $E\left(\overline{X_n}\right)$ et $V\left(\overline{X_n}\right)$ et en déduire $E\left(\overline{X_n}^2\right)$

3. Montrer enfin que $E(W_n) = \frac{n-1}{n} V(X)$ et en déduire un estimateur sans biais de la variance.

Exercice 8.- *Maximum de vraisemblance pour variables continues, d'après* ***EDHEC 2012****.*
On désigne par λ un réel strictement positif et on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \lambda\,|x|\,e^{-\lambda x^2}.$$

1. **a.** Montrer que f est paire.

b. Établir la convergence et calculer la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$.

c. Montrer que la fonction peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X que l'on suppose dans la suite, définie sur un certain espace probabiliste $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

2. **a.** Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} xf(x)dx$.

b. En déduire que la variable aléatoire X possède une espérance, notée $E(X)$, et donner sa valeur.

3. **a.** Montrer, grâce à une intégration par parties, la convergence et donner la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2 f(x)dx$.

b. En déduire que la variable aléatoire X possède une variance, notée $V(X)$ et donner sa valeur.

4. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une variable aléatoire à densité, elle aussi définie sur même espace probabilisé.

a. Donner l'expression de la fonction de répartition F_Y de la variable aléatoire Y à l'aide de la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

b. Déterminer une densité f_Y de Y, puis vérifier que Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.

c. Retrouver alors sans calculs la valeur de $V(X)$.

On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et on considère un échantillon $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ de la loi Y, c'est-à-dire des variables $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ définies sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, indépendantes et de même loi que Y.

5. On considère des réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ strictement positifs, ainsi que la fonction L définie sur $]0, +\infty[$ par

$$L(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} f_Y(x_k)$$

a. Exprimer $L(\lambda)$ puis $\ln(L(\lambda))$ en fonction de $\lambda, x_1, \cdots, x_n$.

b. On considère la fonction φ définie pour tout réel $\lambda > 0$ par

$$\varphi(\lambda) = n\ln(\lambda) - \lambda \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Montrer que la fonction φ admet un maximum, atteint en un seul réel que l'on notera z et que l'on exprimera en fonction de $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Que peut-on dire de z pour la fonction L ?

6. On pose dorénavant, toujours avec $n \geqslant 2$,

$$Z_n = \frac{n}{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n}.$$

On admet que Z_n est une variable aléatoire définie elle aussi sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. La suite $(Z_n)_{n\geqslant 2}$ est appelée *estimateur du maximum de vraisemblance pour* λ.

On admet que la variable aléatoire $\bar{Y_n} = Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_n$ admet pour densité la fonction f_n définie par

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} t \geqslant 0 \\ \frac{\lambda^n}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-\lambda t} & \text{si} t \geqslant 0 \end{cases}.$$

a. En remarquant que $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_{n-1}(t)dt = 1$, montrer que Z_n possède une espérance et que

$$E(Z_n) = \frac{n}{n-1}\lambda.$$

b. Déterminer un estimateur d'espérance λ construit à partir de Z_n.

Exercice 9.-

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. On considère une suite de variables aléatoires (X_n) dont les fonctions de répartitions sont données par

$$F_{X_n}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \frac{x^2}{2n}\right) & \text{si} 0 \leqslant x \leqslant 2n \\ 1 & \text{si} x > 2n \end{cases}.$$

1. Montrer que (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

2. Soit $Z \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et $\alpha \in]0, 1[$.

a. Déterminer deux réels c et d strictement positifs tels que

$$P(c \leqslant Z \leqslant d) = 1 - \alpha \quad \text{et} \quad P(Z \leqslant c) = \frac{\alpha}{2}$$

b. Quelle est la loi de aZ ?

c. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P\left(a \in \left[\frac{c}{X_n}, \frac{d}{X_n}\right]\right) = 1 - \alpha.$$

d. Que peut-on dire de l'intervalle $\left[\frac{c}{X_n}, \frac{d}{X_n}\right]$?