CHAPITRE XIII

FONCTIONS DE DEUX VARIABLES.

Exercice 1.-
On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = 19x^2 + 19y^2 + 26xy - 16x - 16y + 4$.

1. Montrer que, pour tout couple (x,y) de $\mathbb{R}^2$, $f(x,y) = 16\left(x+y-\dfrac{1}{2}\right)^2 + 3(x-y)^2$.

2. En déduire que f possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$. Préciser sa valeur, ainsi que le (ou les) point(s) où ce minimum est atteint.

Exercice 2.-
Soit f définie par $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy + 3y + 3$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étudier les extrema locaux éventuels de f.

3. Monter que : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = \left(y + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4}(x-1)^2$.

4. L'extremum local trouvé est-il global ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.-
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = (2x+y-1)^2 + (2x+y)^2$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Déterminer le gradient de f, et déterminer les points critiques de f.

3. Déterminer la matrice hessienne de f aux points critiques, puis rechercher les extrema éventuels de f.

4. Montrer que pour tout couple (x,y) de réels, $f(x,y) = 2\left(2x+y-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}$, puis conclure.

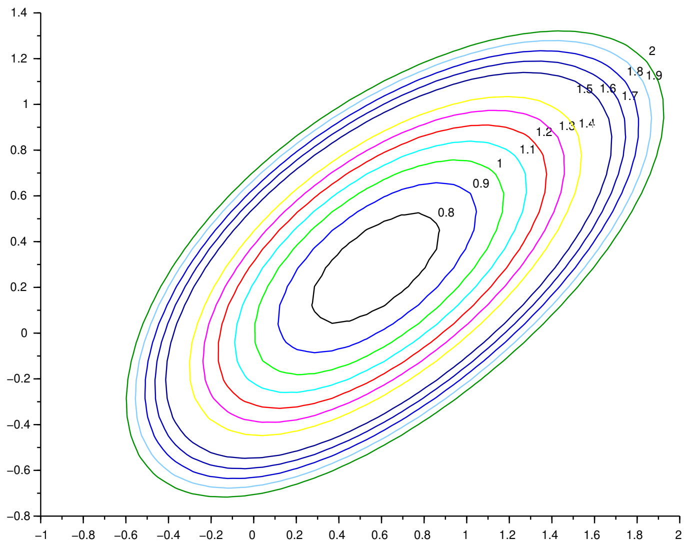
Exercice 4.- **1.** Établir que l'équation $e^{-x} = x$ possède une unique solution réelle.

2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ la fonction $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy + e^{-x}$. Montrer qu'il existe un unique couple (a,b) de réels tel que les dérivées partielles premières s'annulent simultanément en (a,b), et vérifiant : $\begin{cases} a - e^{-a} = 0 \\ b = \dfrac{a}{2}. \end{cases}$.

3. Montrer que f admet un unique extremum local, et préciser sa nature.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

4. Donner les coordonnées approchées du minimum, en observant les lignes de niveau de f sur la figure suivante :



Exercice 5.-

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{1}{4}(x+y)^2 - \dfrac{1}{6}(x^3+y^3)$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que si (a,b) est un point critique de f, alors $a^2 = b^2$, puis déterminer les deux points critiques de f.

3. On suppose que $(a,b) \neq (0,0)$. Le point critique trouvé précédemment est-il un extremum local, et si oui, quelle est sa nature ?

4. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de $f(t, -t+t^3)$. En déduire que $(0,0)$ n'est pas un extremum local.

5. Calculer $f(t,0)$ ainsi que ses limites lorsque t tend vers $+\infty$ ou $-\infty$. En déduire que f n'admet pas d'extremum global.