CHAPITRE XII

VARIABLES À DENSITÉS.

Exercice 1.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \alpha\sqrt{x+2} & \text{si } -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$

1. Déterminer la valeur du réel α pour que f soit une densité. *Dans les questions suivantes, on considère une variable aléatoire réelle X de densité f.*
2. Donner l'expression de la fonction de répartition de X.
3. Calculer les probabilités : $P(X > 1)$, $P(-1 \leqslant X < 1)$, $P_{[X>0]}(X < 1)$.
4. Calculer l'espérance et la variance de X, si elles existent.
5. Montrer que $Y = |X|$ est une variable aléatoire à densité, et donner l'expression d'une densité f_Y de Y.

Exercice 2.

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leqslant x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$

1. Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X à densité.
2. Calculer les probabilités : $P(X > 0,25)$, $P(-0,25 \leqslant X < 0,25)$ et $P_{[X>0,25]}(X < 0,64)$.
3. Déterminer une densité f_X de X.
4. Calculer l'espérance et la variance de X, si elles existent.
5. La variable aléatoire $Z = \sqrt{X}$ est-elle une variable aléatoire à densité ? Si oui, donner une densité, son espérance et sa variance.

Exercice 3. *Loi bêta de première espèce.*
Pour tous entiers naturels m et n, on pose :

$$\beta(n,m) = \int_0^1 u^{n-1}(1-u)^{m-1}\,du.$$

1. **a.** Prouver que $\beta(n,m) = \beta(m,n)$ et que, pour $m \geqslant 2$:

$$\beta(n,m) = \frac{m-1}{n}\beta(n+1,m-1).$$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

b. En déduire $\beta(n,m)$.

2. On considère la fonction $f_{n,m}$ définie par :

$$f_{n,m}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta(n,m)} x^{n-1}(1-x)^{m-1} & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{si } x \notin [0;1]. \end{cases}$$

a. Montrer que $f_{n,m}$ est une densité de probabilité.

b. Soit X une variable aléatoire admettant $f_{n,m}$ comme densité. Après en avoir justifié l'existence, calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 4. *Loi Gamma.*
Soit $a > 0$. On considère $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{a-1}e^{-t}\,dt$.

1. Justifier que $\Gamma(a)$ est définie pour tout $a > 0$, et calculer $\Gamma(1)$.

2. Montrer que, pour tout $a > 0$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$. En déduire une expression de $\Gamma(n)$ en fonction de n lorsque n est un entier naturel non nul.

3. Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{a^n}{(n-1)!} x^{n-1}e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$

a. Montrer que f_n est une densité de probabilité d'une variable aléatoire X_n.

b. Déterminer l'espérance de X_n, si elle existe.

Exercice 5.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([0;1])$.

1. Rappeler la valeur de l'espérance et de la variance de X.

2. Soit $Y = 5X - 1$.

a. Déterminer la loi de Y.

b. Donner la valeur de $E(Y)$ et de $V(Y)$ de deux façons différentes.

Exercice 6.
Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

1. a. Déterminer la loi de la variable aléatoire $Y = \sqrt{X}$.

b. Calculer l'espérance et la variance de Y.

2. Mêmes questions pour $Y = X^2$.

Exercice 7.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.

2. Déterminer la fonction de répartition F d'une variable aléatoire X ayant pour densité f. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un ensemble à préciser.

3. Déterminer l'espérance et la variance de X. *On utilisera les propriétés d'une loi usuelle pour éviter des calculs inutiles.*

4. Déterminer la loi de $Y = |X|$. La variable $Z = X + Y$ est-elle à densité ?

Exercice 8.
On considère une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre $a > 0$. On pose $Y = \lfloor X \rfloor$ (Y est la partie entière de X) et $Z = X - Y$.

1. Déterminer la loi de Y.

2. Déterminer l'espérance et la variance de Y.
On pourra utiliser la loi de $Y + 1$.

3. Déterminer la loi de Z.

4. Déterminer l'espérance de Z. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 9.
Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de densités respectives f_X et f_Y. On pose $Z = \max(X, Y)$ et $T = \min(X, Y)$.

1. Exprimer les fonction de répartition de Z et T en fonction des fonctions de répartition F_X et F_Y de X et Y.

2. Déterminer une densité f_Z de Z et une densité f_T de T en fonction de f_X, f_Y, F_X et F_Y.

3. On suppose que X et Y suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$. Préciser f_Z et f_T. Déterminer l'espérance et la variance de Z et T.

4. On suppose que X et Y suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs λ et μ. Quelle est la loi (classique) suivie par T ? En déduire l'espérance et la variance de T. Préciser f_Z. En déduire l'espérance et la variance de Z.

Exercice 10.
Déterminer les moments d'ordre n de la loi exponentielle et de la loi normale centrée réduite.

Exercice 11.
Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0; 1)$.

1. Soit $Y = -2X + 4$. Y est-elle une variable aléatoire à densité ? Si oui, déterminer une densité de Y.

2. Mêmes questions pour $Z = 5 - Y$.