CHAPITRE XI

SYSTÈMES DIFFÉRENTIELS LINÉAIRES.

Exercice 1.-
Résoudre les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 1 à coefficients constants suivantes.

1. $y' = 2y$ **2.** $y' - 3y = 0$ **3.** $y' + 4y = 0$

Exercice 2.-
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y' + 10y = 0 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y' - 7y = 0 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} y' = 8y \\ y(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 3.-
Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y' + 2y = 3$ **2.** $y' - y = t^2 + 1$ **3.** $y' + y = te^t$

Exercice 4.-
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - 3y = t\ln(t)e^{3t}$.

Exercice 5.-
Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$ **2.** $y'' - 4y' + 4y = 0$ **3.** $y'' - 2y = 0$

Exercice 6.-
Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$

Exercice 7.-
Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

1. $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$

2. $y'' - 3y' + 2y = te^t$

3. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$

4. $y'' - 4y' + 4y = (-1+t)e^{-t}$

5. $y'' - 2y = e^t$

6. $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$

Exercice 8.-
Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

1. En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.

2. En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 9.-
Soit $(a,b) \in]0,+\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

(E) $$y' = ay - aby^2$$

1. Déterminer les équilibres de l'équation logistique.

2. Soit f une solution de (E) sur $[0,+\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).

a. On pose $z = \dfrac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geqslant 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.

b. En déduire que, pour tout $t \geqslant 0$, $f(t) = \dfrac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.

3. Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 10.-
On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & 3y \\ y' & = & x & - & y \end{array} \right.$$

1. Résoudre le système (S).

2. Trouver les états d'équilibre du système (S).

3. Existe-t-il des trajectoires convergentes ? Si oui, en donner une.

4. Justifier que toutes les trajectoires ne sont pas convergentes.

Exercice 11.-
On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \left\{ \begin{array}{rcrcr} x' & = & x & + & y \\ y' & = & -2x & - & 2y \end{array} \right.$$

1. Montrer que toutes les trajectoires de (S) sont convergentes.

2. Montrer qu'il existe une infinité d'états d'équilibre associés à (S) et les donner.

3. Résoudre le système (S).

4. Expliciter une trajectoire non constante qui converge vers l'état d'équilibre $(2,-2)$.

Exercice 12.-
On considère l'équation différentielle 2×2 suivante :

(E) $$x''(t) + 5x'(t) + 4x(t) = 0$$

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{pmatrix}$ possède deux valeurs propres que l'on déterminera, puis donner une base de chacun des sous-espaces propres associés.

2. Résoudre l'équation (E).

Exercice 13.-
On considère le système différentiel

$$(S) \qquad \begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

1. **a.** Justifier que la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ possède une unique valeur propre, que l'on déterminera.

b. En déduire que A n'est pas diagonalisable.

2. **a.** On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.

b. Prouver que $P^{-1}AP$ est une matrice triangulaire T que l'on explicitera.

Pour toute la suite, on note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et on pose $Y = P^{-1}X$.

3. **a.** En notant $Y = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$, prouver que : $Y' = P^{-1}X'$.

b. En déduire que : $X' = AX \iff Y' = TY$.

4. **a.** Résoudre l'équation différentielle $v' = 2v$.

b. En déduire les solutions du système $Y' = TY$.

c. Conclure.

Exercice 14.-
On considère le système différentiel linéaire

$$(E) \qquad \begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x + z \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

1. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Définir une matrice A telle que

$$(E) \iff X' = AX$$

2. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et on admet que P est inversible d'inverse $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

3. **a.** Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_1) : \varphi' = \varphi$.

b. Résoudre l'équation différentielle $(\mathscr{E}_2) : \varphi' = -\varphi$.

c. Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(\mathscr{E}_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

4. On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$. Montrer que α est solution de $(\mathscr{E}_1)$, γ est solution de $(\mathscr{E}_2)$ et β est solution de $(\mathscr{E}_3)$ pour un réel c bien choisi.

5. En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)e^{-t} \\ y(t) = \lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^{t} \\ z(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)e^{-t} + \lambda_3 e^{t} \end{cases}$$

6. En déduire une solution non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre du système (E).