CHAPITRE VII

RÉDUCTION.

Exercice 1.-
Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $J \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A = 2I + J$.
2. Calculer J^2 et J^3, en déduire J^n pour tout entier naturel n.
3. Calculer A^7.

Exercice 2.-
On considère l'application f définie par $f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Quelle est la matrice A de f dans les bases canoniques ?
3. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.

Exercice 3.-
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{pmatrix}$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$ avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 6u_{n+2} - 11u_{n+1} + 6u_n \end{cases}$$

1. Déterminer les valeurs propres et les espaces propres de A.
2. **a.** Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$. En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.
   b. Déterminer P inversible et D diagonale telles que $A = PDP^{-1}$.
   c. Déterminer le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4.-
Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A et J ne sont pas diagonalisables.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 5.-
On note $J_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on rappelle que la famille (J_1, J_2, J_3, J_4) est la base canonique de l'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application qui, à toute matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ associe la matrice $f(M) = M + (a+d)I$ où I désigne la matrice identité $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base canonique.
2. Justifier que A est diagonalisable.
3. Montrer que la famille $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
4. Écrire la matrice D de f dans cette base. En déduire l'existence d'une matrice P inversible telle que $A = PDP^{-1}$, vérifiant de plus que P n'a que des 1 sur sa diagonale et seulement des 0 et des 1 sur sa premier ligne.
5. Déterminer P^{-1} puis A^n.

Exercice 6.-
On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ et on définit l'application $(f(P))(x) = xP(x+1) - (x+1)P(x)$ pour tout P appartenant à E.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base canonique de E.
3. Déterminer les valeurs propres de A. A est-elle diagonalisable ? f est-il un automorphisme de E ?
4. Déterminer les espaces propres de A.
5. Préciser le noyau et l'image de f.

Exercice 7.-
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $f(1,1,1)$. Que peut-on en déduire ?
2. Calculer $A^2 - 2A$. En déduire un polynôme annulateur de A.
3. Montrer que les valeurs propres possibles de A sont -2 et 4.
4. Déterminer les sous-espaces propres de A.
5. A est-elle diagonalisable ? f est-il bijectif ?