CHAPITRE VI

INTÉGRATION.

Exercice 1.-
Calculer :

1. $I_1 = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(t)}{t}\,dt.$
2. $I_2 = \displaystyle\int_1^2 3^t\,dt.$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+4u}\,du.$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\,dx.$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^2 \frac{1}{t^2+4t+4}\,dt.$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^n x\lfloor x\rfloor\,dx.$
7. $I_7 = \displaystyle\int_1^4 \frac{1+t}{1+\sqrt{t}}\,dt.$

Pour I_7, poser $u=\sqrt{t}$ puis déterminer quatre réels a, b, c et d tels que $\dfrac{2x+2x^3}{1+x} = ax^2+bx+c+\dfrac{d}{1+x}$ pour tout $x \neq -1$.

Exercice 2.-
Déterminer le domaine d'existence, et calculer $I(x) = \displaystyle\int_0^x 2te^{1+t^2}\,dt$ puis $J(x) = \displaystyle\int_0^x 2t^3e^{1+t^2}\,dt.$

Exercice 3.-

1. Calculer de deux manières différentes : $J_n = \displaystyle\int_0^1 (1+x)^n\,dx.$
2. En déduire $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}.$

Exercice 4.-
Soit p et q deux entiers naturels. On pose : $I_{p,q} = \displaystyle\int_0^1 x^p(1-x)^q\,dx.$

1. Exprimer $I_{p+1,q}$ en fonction de $I_{p,q+1}$.
2. Calculer $I_{0,q}$.
3. En déduire l'expression de $I_{p,q}$ en fonction de p et q.

Exercice 5.-

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}(n+k)}.$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{n}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 6.-
On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n e^{-t}\,dt$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$. *On pourra faire un encadrement.*

2. Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1}.

3. En déduire que $I_n = n!\left(1-\frac{1}{e}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$.

4. Que vaut $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Exercice 7.-
Soit G la fonction définie par $G(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)}\,dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de G.

2. Étudier les variations de G.

3. Calculer $\displaystyle\int_x^{x^2}\frac{1}{t\ln(t)}\,dt$.

4. Montrer que :

$$\forall x \in]0,1[,\quad x^2\ln(2) \leq G(x) \leq x\ln(2)$$
$$\forall x > 1,\quad x\ln(2) \leq G(x) \leq x^2\ln(2).$$

On pourra utiliser : $\frac{1}{\ln(t)} = t\left(\frac{1}{t}\ln(t)\right)$.

5. Déterminer les limites de G aux bornes de son ensemble de définition.
Pourquoi peut-on prolonger G par continuité en 0 et en 1 ?

Exercice 8.-
Étudier la nature et calculer (lorsque c'est possible) les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t+3}\,dt$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t}\,dt$ (hors programme)

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{1}{2u+3}\,du$

4. $I_4 = \displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{1}{t(\ln(t))^\alpha}\,dt$
avec $\alpha \neq 1$.

Exercice 9.-
Étudier la convergence des intégrales suivantes (on ne demande pas de les calculer) :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$

2. $I_2 = \displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{dt}{e^t+1}$

3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{+\infty} u^4e^{-u}\,du$

4. $I_4 = \displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x\ln(x)}{x^4+1}\,dx$

5. $I_6 = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{t^4+t^2+1}\,dt$

6. $I_7 = \displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{t}+t}{t+t^2}\,dt$

Exercice 10.-
On note $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^4)^n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Étudier la convergence de l'intégrale I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n - I_{n+1} = \dfrac{1}{4n} I_n$.

4. En déduire une expression de I_n en fonction de n et I_1.

Exercice 11.-
On considère $I_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} x^p e^{-x}\,dx$ et $J_p = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^p}{e^x-1}\,dx$, $p \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que I_p est une intégrale convergente pour tout $p \in \mathbb{N}$.

2. Exprimer I_{p+1} en fonction de I_p.

3. En déduire une expression de I_p en fonction de p.

4. Montrer que J_p existe pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 12.- *Fonction Gamma.*

1. Montrer que pour tout réel $x \geqslant 1$, l'intégrale impropre

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$$

est convergente.

2. On pose pour tout $x > 0$: $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\,dt$.

Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, puis calculer $\Gamma(n)$ pour tout entier naturel n non nul.