CHAPITRE IV

ÉQUIVALENTS ET DL.

Exercice 1.- **1.** Donner un équivalent puis calculer la limite des fonctions suivantes en $+\infty$

a. $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$

b. $\dfrac{3x^2+4-e^{\frac{x}{2}}}{\ln(x)}$

c. $\dfrac{\ln(x+1)}{\ln(\sqrt{x})}$

d. $x^2\ln(x)-x^3+1$

e. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

f. $\dfrac{\ln(2x+1)}{x+1}$

2. Donner un équivalent puis calculer la limite des fonctions suivantes en $-\infty$:

a. $x^{23}-x^{17}$

b. $\dfrac{x-1}{x^3+x^2+x+1}$

c. $x+\sqrt{x^2+x+1}$

d. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

e. $(1+x^2)e^x$

f. $\sqrt{\dfrac{x^2}{2x^2+x+1}}$

3. Donner un équivalent puis calculer les limites des fonctions suivantes en 0 (en 0^+ et 0^- si nécessaire)

a. $x+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}$

b. $x+\ln(x)+\dfrac{1}{x}$

c. $\dfrac{\ln(1+x^2)}{x}$

d. $(1+x)^{\frac{1}{x}}$

e. $\dfrac{1-e^{-x}}{x}$

f. $\dfrac{4x-2}{x^2-4x}$

Exercice 2.-
Calculer les développements limités à l'ordre 2 suivants, puis préciser la limite de la fonction au point considéré, et un équivalent simple au voisinage du point :

1. $f(x)=e^x\ln(1-2x)$ en 0.

2. $f(x)=\dfrac{1}{5-3x}$ en 0.

3. $f(x)=\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$ en 0.

4. $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$ en 1.

Exercice 3.-
Calculer les limites suivantes, préciser un équivalent de la fonction au point considéré :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+e^{2x}-1-2x}{x^2}$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 4.- *ECRICOME (extrait).*
Soit f définie par : $f(0) = 1$ et $f(x) = \dfrac{x}{\ln(1+x)}$ si $x > 0$.

1. Montrer que f est continue sur $[0; +\infty[$.

2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; +\infty[$.

3. Donner le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $\ln(x+1) - \dfrac{x}{x+1}$. En déduire un équivalent de $f'(x)$ au voisinage de 0.

4. Prouver que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0; +\infty[$.

Exercice 5.- *EDHEC (extrait).*
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = xe^{-\frac{n}{x}}$ pour tout $x > 0$.

1. Donner le développement limité à l'ordre 2 de e^u lorsque u est au voisinage de 0.

2. En déduire qu'au voisinage de $+\infty$, on a : $f_n(x) = x - n + \dfrac{n^2}{2x} + \underset{x \to +\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{x}\right)$.

3. En déduire un équivalent de $f_n(x)$, puis la limite de $f_n(x)$ et celle de $f_n(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$.