CHAPITRE III

COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES.

Exercice 1.-
Montrer que les séries suivantes sont convergentes, puis calculer leurs sommes.

1. $\sum\limits_{k\geqslant 3} \frac{2}{k(k-2)}$.
2. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right)$.
3. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{(k+1)^2}{3^k}$.
4. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{k^2+2^k}{4^k}$.
5. $\sum\limits_{k\geqslant 0} (-1)^k k e^{-2k}$.
6. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{2^k}{(k+2)!}$.
7. $\sum\limits_{k\geqslant 0} \frac{k(k-1)}{k!}$.
8. $\sum\limits_{k\geqslant 2} \frac{k^2-1}{k!}$.

   Indication : chercher trois réels a, b et c tels que $\frac{k^2-1}{k!} = \frac{a}{(k-2)!} + \frac{b}{(k-1)!} + \frac{c}{k!}$.

Exercice 2.-
Quelle est la nature des séries de termes généraux suivants ? On ne demande pas de calculer la somme des séries convergentes.

1. $u_k = \frac{\ln k}{k^3}$.
2. $u_k = \frac{1}{(k+12)(2k+17)}$.
3. $u_k = \frac{k+2^{-k}}{(k+2)^2}$.
4. $u_k = \frac{(-1)^k}{k^2}$.
5. $u_k = \frac{1}{\sqrt{k^3-k+1}}$.
6. $u_k = \frac{\ln k}{k^2}$.
7. $u_k = e^{\frac{1}{k^2}} - 1$.
8. $u_k = k\ln\left(1+e^{-k}\right)$.
9. $u_k = \frac{a^n 2^{\sqrt{n}}}{2^{\sqrt{n}}+b^n}$,

   à discuter en fonction des deux réels a et b.

Exercice 3.-
On étudie dans cet exercice la convergence de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$. Puis on en déduit une critère général pour montrer qu'une série dont le terme général est de de signe quelconque est convergente (sans être nécessairement absolument convergente).

Posons $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

1. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$ est-elle absolument convergente ?
2. Montrer que les suites extraites $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

3. Que peut-on en déduire pour la série ?

On veut maintenant trouver la valeur de la somme.

4. On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}} dt$.

- **a.** En intégrant par parties, montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$.
- **b.** Calculer I_0, en déduire I_1.
- **c.** En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = -\ln 2 + (-1)^n I_n$.
- **d.** Montrer que la suite $(I_n)_n$ converge et déterminer sa limite.
- **e.** En déduire la somme de la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n}$.

5. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante et telle que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. En s'inspirant des questions **2** et **3**, montrer que la série de terme général a_n converge.

On ne peut rien dire en général sur la valeur de la somme.

Exercice 4.-
Quelle est la nature de la série de terme général
$$u_n = \ln n^{-\ln n}.$$

Exercice 5.- *Séries de Bertrand.*
Étudier la convergence des séries de termes généraux
$$u_n = \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$