CHAPITRE II

ESPACES VECTORIELS.

Exercice 1.-
Parmi les ensembles ci-dessous, quels sont ceux qui sont des espaces vectoriels ?

1. les fonctions paires.
2. les fonctions continues sur $[0;1]$.
3. les suites géométriques de raison 2.
4. les fonctions croissantes sur $[0;1]$.
5. les fonctions monotones sur $[0;1]$.
6. les fonctions positives sur $[0;1]$.

Exercice 2.-
Montrer que les ensembles suivants sont des espaces vectoriels et en déterminer une base :

1. l'ensemble F_1 des suites (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.
2. l'ensemble F_2 des matrices $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telles que $a = 2b$.
3. les matrices symétriques de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
4. $F_4 = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } x - 2y = 0\right\}$.
5. $F_5 = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \text{ tel que } 2P'(1) + P(2) = 0\}$.

Exercice 3.-
Déterminer parmi ces ensembles, ceux qui sont des espaces vectoriels, et en donner une base lorsque c'est possible :

1. l'ensemble G_1 des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^x$ avec a et b réels.
2. l'ensemble G_2 des matrices $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ avec $a+b+c=0, d+e+f=0, g+h+i=0$.
3. l'ensemble G_4 des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(1) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = 0$.
4. l'ensemble G_5 des polynômes P de $\mathbb{R}_2[X]$ vérifiant $P(1) = 0$ et $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = 0$.
5. l'ensemble G_6 des polynômes P vérifiant $P'(1) = 2$.

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

Exercice 4.-
La famille $\mathcal{F}$ est-elle libre ? est-elle génératrice de l'espace vectoriel E ? est-elle une base de E ?

1. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $u = (1, 1, 1), v = (0, 1, -1), w = (2, 1, 1)$.

2. $E = \mathbb{R}_3[X]$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $P_1(x) = x^2 + x, P_2(x) = x^3, P_3(x) = -x^2 + 1, P_4(x) = x^2$.

3. $E = \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $t = (1, 1, 1), u = (0, 1, -1), v = (2, 1, 1), w = (1, 2, 3)$.

4. $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}$ est constituée des vecteurs : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.