CHAPITRE I

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES.

Exercice 1.-
Vrai ou Faux ?

1. $n \underset{n\to+\infty}{\sim} n+1$.
2. $n^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} n^2+n$.
3. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(100000000n)$.
4. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{n+\frac{1}{100000000}}$.
5. $e^n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{2n}$.
6. $\ln(n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n+1)$.

Exercice 2.-
Déterminer un équivalent et la limite de chacune des suites suivantes.

1. $u_n = -2n^2+7n+3$.
2. $u_n = n - \frac{3}{n^5}$.
3. $u_n = \frac{3n^2+2n-5}{-4n^2+3n-8}$.
4. $u_n = (1.1)^n - n^{92} + e^{-n}$.
5. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n - \sqrt{n}$.
6. $u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n \times \sqrt{n}$.
7. $u_n = \frac{3n^2+2^n-5^n}{\ln(n)-4n^2+3^n-8}$.
8. $u_n = \sqrt{2n+1} + \sqrt{2n}$.
9. $u_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{2n}$.
10. $u_n = n\ln\left(1+\frac{2}{n}\right)$.

Exercice 3.-

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$n^2 \leqslant u_n \leqslant n^2+n+1.$$
Déterminer la limite et un équivalent de u_n.
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite vérifiant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\frac{1}{n+1} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n}.$$
Déterminer la limite de $(nv_n)_n$, en déduire un équivalent de v_n et sa limite.

Exercice 4.-
Soit u la suite définie, pour $n \in \mathbb{N}$ par
$$u_0 = 3 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2u_n-1}.$$

ECG 2 Maths Appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1$. Puis déterminer la monotonie de la suite u.
2. Justifier la convergence de la suite u et expliciter sa limite.

Exercice 5.-
Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$. On définit deux suites u et v par

$$u_0 = a \quad v_0 = b \quad u_{n+1} = \frac{2u_n v_n}{u_n + v_n} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

1. Montrer que pour tout n, $0 < u_n < v_n$ puis discuter la monotonie des suites u et v.
2. Montrer que pour tout n, $0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{v_n - u_n}{2}$ puis
$$0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \frac{v_0 - u_0}{2^n}.$$
3. Déduire des questions précédentes que les deux suites sont convergentes.
4. Montrer que la suite $(u_n v_n)_n$ est constante. En déduire la limite commune des suites u et v.

Exercice 6.-
On note (E_n) l'équation

$$(E_n) : \frac{x^3}{x^2+1} = n.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation (E_n) possède une unique solution notée x_n, sur $\mathbb{R}$.
   Donner la valeur de u_0.
2. Quelle est la monotonie de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$,
$$n \leqslant x_n \leqslant n+1.$$
4. En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et donner un équivalent.

Exercice 7.-
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = x^n + 9x^2 - 4$$

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une et une seule solution strictement positive, qu'on note u_n.
2. Calculer u_1 et u_2 puis vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left]0, \frac{2}{3}\right[$.
3. Monter que pour tout $x \in]0,1[$, $f_{n+1}(x) < f_n(x)$. Que peut-on en déduire concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, vers une limite que l'on notera ℓ.
5. Déterminer la limite de u_n^n et en déduire la valeur de ℓ.

Exercice 8.-
Soit la suite u définie par

$$u_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(3 + u_n^2\right).$$

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5}(3 + x^2)$.

1. **a.** Dresser le tableau de variations de f sur $[0,1]$ et montrer que $[0,1]$ est un intervalle stable par f.
   b. Déterminer l'unique point fixe $r \in [0,1]$ de f.
   c. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant \frac{2}{5}$.

2. **a.** Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \in [0,1]$.

b. Démontrer que pour tout $n \geqslant 0$, $|u_{n+1} - r| \leqslant \frac{2}{5}\,|u_n - r|$ puis
$$|u_n - r| \leqslant \left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

c. Trouver explicitement un rang n_0 de la suite tel que, pour $n \geqslant n_0$, on ait
$$|u_n - r| \leqslant 10^{-10}.$$

d. En déduire une valeur approchée de r à 10^{-10} près.