DEVOIR NUMÉRO 4 VERSION B

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice : HEC 2011

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. **a.** Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b. Vérifier que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur-colonne propre associé.

c. Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- Pour tout $i, j \in [\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$.
- A admet la valeur propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne propre associé à cette valeur propre.

2. L'ensemble $\mathcal{S}_n$ muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?

3. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est un matrice de $\mathcal{S}_n$.

4. Soit A un élément de $\mathcal{S}_n$ et λ une valeur propre de A.

a. Montrer qu'il existe une vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ pour lequel il existe un entier $k \in [\![1, n]\!]$, vérifiant $v_k = 1$ et pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $|v_i| \leqslant 1$.

b. En déduire que l'on a $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.

5. Montrer que si les éléments diagonaux de la matrice $A \in \mathcal{S}_n$ sont tous strictement supérieurs à $1/2$, la matrice A est inversible.

Date: 3 Février 2024 8h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

Problème 1

Partie 1 : Réduction d'une matrice carrée. On considère la matrice carrée $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1. On fournit le code Python dont le résultat de l'exécution apparaît ci-après.

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[2,-2,2], [1, 1, 2], [-2, 0, -3]])
print (al.matrix_power(A, 3))
```

Exécution

```
> > >
  [[ 2, -2,  2],
   [ 1,  1,  2],
   [-2,  0, -3]]
```

Déduire de l'affichage Python ci-dessus une égalité entre deux matrices.

2. Quelles sont alors les seules valeurs propres possibles de A ?

3. Déterminer le spectre de A.

4. Déterminer une matrice D diagonale dont les coefficients sont rangés dans l'ordre croissant et une matrice P inversible de première ligne $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ telles que $A = PDP^{-1}$.

5. Montrer que, pour tout entier $k \geqslant 0$, on a $A^k = PD^kP^{-1}$.

Partie 2 : Exponentielle d'une matrice carrée. Si $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), (f_n), (g_n), (h_n), (i_n)$ désignent neuf suites convergentes, de limites respectives $a, b, c, d, e, f, g, h, i$, et si (M_n) est une suite de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \\ d_n & e_n & f_n \\ g_n & h_n & i_n \end{pmatrix},$$

on dit que la suite de matrices (M_n) *admet une limite coefficient par coefficient*, et on note

$$\lim_{n \to +\infty} M_n = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Si $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on pose, pour tout entier naturel n

$$S_n(M) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} M^k.$$

Lorsque $(S_n(M))$ admet une limite coefficient par coefficient, on note e^M cette limite.

6. Deux résultats théoriques. On utilisera les notations du préambule de la partie II pour les preuves.

- **a.** Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et soit (α_n) une suite réelle convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite de matrices $(\alpha_n M)$ admet une limite coefficient par coefficient et que
$$\lim_{n \to +\infty} \alpha_n M = \ell M$$
- **b.** Soient (M_n) et (M'_n) deux suites de matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui admettent chacune une limite coefficient par coefficient. On note $\lim_{n \to +\infty} M_n = M$ et $\lim_{n \to +\infty} M'_n = M'$. Montrer que les suites de matrices $(M_n + M'_n)$ et $(M_n M'_n)$ admettent chacune une limite coefficient par coefficient et que
$$\lim_{n \to +\infty} M_n + M'_n = M + M' \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} M_n M'_n = MM'$$

Les candidat·es devront référer précisément à ces questions lorsque ces résultats seront utilisés.

7. Montrer que, si $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ est diagonale, alors e^D existe et vaut $e^D = \begin{pmatrix} e^a & 0 & 0 \\ 0 & e^b & 0 \\ 0 & 0 & e^c \end{pmatrix}$.

8. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a. Calculer M^2 et M^3 puis, pour tout entier k supérieur ou égal à 3, déterminer M^k.

b. Donner, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'expression de $S_n(M)$. En déduire l'existence et l'expression de la matrice e^M.

9. Dans cette question, la matrice M est donnée par $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

a. Calculer M^2.

b. A l'aide d'un raisonnement par récurrence, déterminer pour tout k de $\mathbb{N}$ l'expression de M^k en fonction de k.

c. Établir, pour tout entier naturel n, l'égalité suivante

$$S_n(M) = I + \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{k!} - 1\right) M.$$

d. En déduire que e^M existe et que

$$e^M = I + \frac{e^3 - 1}{3} M.$$

10. Dans cette question, on considère la matrice A de la Partie 1.

a. Déduire de la Question 5 une expression de $S_n(A)$ en fonction de $S_n(D)$ et P.

b. Conclure que e^A existe et l'expliciter en fonction de P et P^{-1} (définies à la Question 4) et d'une matrice diagonale que l'on précisera.

11. Dans cette question, on considère une matrice diagonalisable $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Montrer que e^M existe et qu'elle est diagonalisable.

b. Soit $t \in \mathbb{R}$. Justifier que tM est encore diagonalisable et expliciter une matrice diagonale à laquelle e^{tM} est semblable.

Partie 3 : Application à un système différentiel linéaire. On considère le système différentiel

$$(\mathcal{S}) \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & 2x(t) - 2y(t) + 2z(t) \\ y'(t) & = & x(t) + y(t) + 2z(t) \\ z'(t) & = & -2x(t) - 3z(t) \end{array} \right.$$

où les inconnues x, y, z sont des fonctions définies de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

12. Montrer que X est solution de $(\mathcal{S})$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$ où A est la matrice introduite dans la Partie 1.

13. Le système différentiel $(\mathcal{S})$ possède-t-il des équilibres ? Si oui, les déterminer.

14. Montrer que les solutions du système différentiel $(\mathcal{S})$ peuvent s'écrire sous la forme

$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t,$$

où α, β, γ sont des constantes réelles et

$$U_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad U_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad U_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

15. On considère les problèmes de Cauchy

$$(\mathcal{P}_1) \quad \begin{cases} X'(t) & = & AX(t) \\ & & \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ -8 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{et} \qquad (\mathcal{P}_2) \quad \begin{cases} X'(t) & = & AX(t) \\ & & \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

a. Déterminer l'unique solution X_1 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_1)$.

b. Montrer que la trajectoire associée à la solution X_1 est convergente. Expliciter le point limite (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3). Quelle propriété possède ce point vis-à-vis du système linéaire $(\mathcal{S})$?

c. Déterminer l'unique solution X_2 du problème de Cauchy $(\mathcal{P}_2)$.

d. Montrer que la trajectoire associée à la solution X_2 est divergente.

e. On a représenté ci-après les tracés de quatre solutions du système $(\mathcal{S})$. Expliciter quelles figures sont les tracés associés aux solutions X_1 et X_2 étudiées ci-avant. Justifier la réponse.

16. On reprend les notations de la Question 4 et on considère une solution X de $(\mathcal{S})$ de la forme

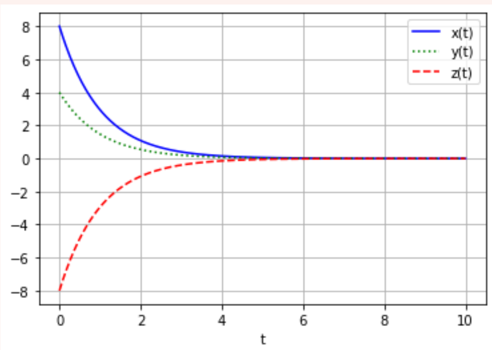
$$X(t) = \alpha e^{-t} U_{-1} + \beta U_0 + \gamma U_1 e^t.$$

a. Expliciter e^{tA} pour tout $t \in \mathbb{R}$.

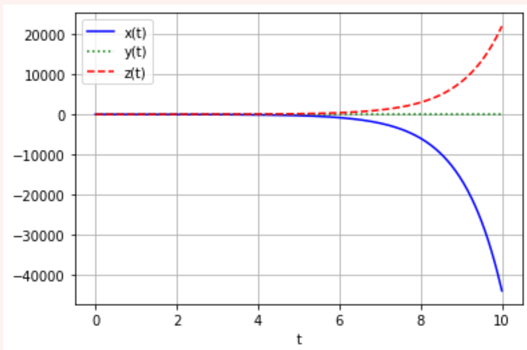
b. En posant $C = P \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, montrer que $X(t) = e^{tA} \cdot C$.

c. Commenter le résultat de la dernière question, au regard des résultats du cours sur les équations différentielles du premier ordre à coefficient constant.

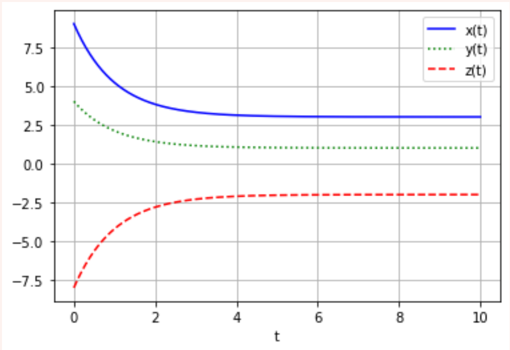
Trajectoire 1



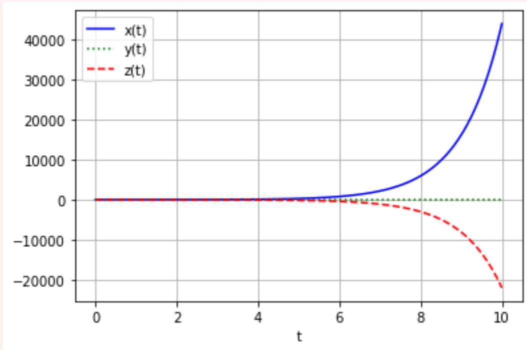
Trajectoire 3



Trajectoire 2



Trajectoire 4



Partie 4 : Compléments sur l'exponentielle de matrices. On s'intéresse dans cette partie à l'image de l'application exponentielle définie de manière tout à fait analogue sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

17. Montrer que si A et B sont deux matrices qui commutent, alors

$$e^{A+B} = e^A \cdot e^B.$$

Indication : On pourra admettre que l'on peut permuter une somme infinie de matrices avec une somme finie.

18. En déduire que toute matrice dans l'image de l'application exponentielle est inversible.

19. Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- **a.** Montrer que B est inversible.
- **b.** Montrer qu'il n'existe aucune matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = B$.
- **c.** En déduire que B n'est pas dans l'image de l'application exponentielle.

Problème 2 : EML 2017 Exercice 3

On considère une urne contenant initialement une boule bleue et deux boules rouges.

On effectue dans cette urne des tirages successifs de la façon suivante : on pioche une boule au hasard, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne en ajoutant une boule de la même couleur que celle qui vient d'être obtenue.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note :

B_k l'événement "on obtient une boule bleue au $k$ième tirage.

R_k l'événement "on obtient une boule rouge au $k$ième tirage.

Partie I : simulation informatique.

1. Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle simule l'expérience étudiée et renvoie le nombre de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages, l'entier n étant entré en argument.

```
import numpy.random as rd

def EML(n) :
  b = 1 # b designe le nombre de boules bleues presentes dans l'urne.
  r = 2 # b designe le nombre de boules rouges presentes dans l'urne.
  s = 0 # s designe le nombre de boules rouges obtenues lors des n tirages.
  for k in range(n) :
    x = rd.rand()
    if ......... :
      .........
    else :
      .........
  return s
```

2. On exécute le programme suivant :

```
n = 10
m = 0
for i in range(1000) :
  m = m + EML(n)
print(m/1000)
```

On obtient : 6.657. Comment interpréter ce résultat ?

Partie II : Rang d'apparition de la première boule bleue et d'apparition de la première boule rouge. On définit la variable aléatoire Y égale au rang d'apparition de la première boule bleue et la variable aléatoire Z égale au rang d'apparition de la première boule rouge.

3. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbb{P}([Y = n]) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}.$$

b. La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Une variance ?

4. Déterminer la loi de Z. La variable aléatoire Z admet-elle une espérance ? Une variance ?

Partie III : Nombre de boules rouges obtenues au cours de n tirages. On définit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la variable X égale à 1 si on obtient une boule rouge au $k$ième tirage et égale à 0 sinon.

On définit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la variable S_n égale au nombre de boules rouges obtenues au cours des n premiers tirages.

5. Donner, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, une relation entre S_n et certaines des variables aléatoires X_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.

6. Déterminer la loi de X_1, son espérance et sa variance.

7. **a.** Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

b. En déduire la loi de X_2.

c. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0, n]\!]$.

a. Calculer
$$\mathbb{P}(R_1 \cap \cdots R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots B_n).$$

b. Justifier que
$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \binom{n}{k} R_1 \cap \cdots (R_k \cap B_{k+1} \cap \cdots B_n).$$
puis en déduire que
$$\mathbb{P}([S_n = k]) = \frac{2(k+1)}{(n+1)(n+2)}.$$

9. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, S_n admet une espérance et que $\mathbb{E}(S_n) = \dfrac{2n}{3}$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,
$$\mathbb{P}_{[S_n=k]}([X_{n+1} = 1]) = \frac{k+2}{n+3}.$$

b. En déduire que
$$\mathbb{P}([X_{n+1} = 1]) = \frac{\mathbb{E}(S_n) + 2}{n+3}.$$

c. Déterminer alors la loi de la variable aléatoire X_{n+1}. Que remarque-t-on ?

Partie IV : Étude d'une convergence en loi. On s'intéresse dans cette partie à la proportion de boules rouges obtenues lors des n premiers tirages. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = \dfrac{S_n}{n}$.

11. Justifier que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: pour tout $x < 0$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 0$ et, pour tout $x > 1$, $\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = 1$.

12. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,
$$\mathbb{P}([T_n \leqslant x]) = \frac{(\lfloor nx \rfloor + 1)(\lfloor nx \rfloor + 2)}{(n+1)(n+2)},$$
où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

13. **Version Cubes** En déduire que la suite de variables aléatoires $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Version Carrés Quelle est la limite de $\mathbb{P}([T_n \leqslant x])$ lorsque n tend vers $+\infty$? Comment interpréter ce résultat ?