DEVOIR NUMÉRO 4 VERSION A

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1.- EML 2023 Exercice 2.

On considère la matrice A définie par $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Partie I - Réduction de la matrice A.

1. **a.** Quel est le rang de la matrice $A - 2I$?

b. Justifier que 2 est valeur propre de la matrice A et déterminer la dimension du sous-espace propre E_2 associé à la valeur propre 2.

c. Donner une base de E_2.

d. Combien de valeurs propres autres que 2 la matrice A peut-elle avoir ?

2. **a.** Dans cette sous-question M est une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et U est le vecteur colonne $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Que représentent les coordonnées du vecteur colonne MU pour la matrice M ?

b. En déduire une valeur propre de A ainsi qu'une base du sous-espace propre associé.

3. Donner une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale et une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $A = PDP^{-1}$ (on ne demande pas de préciser la matrice P^{-1}).

Partie II - Un système différentiel. On considère le système différentiel

$$(S) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & 3x + y + z \\ y' & = & x + 3y + z \\ z' & = & x + y + 3z \end{array} \right. .$$

où x, y et z sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

4. Résoudre le système différentiel (S).

5. **a.** Quel résultat permet d'affirmer l'existence d'une unique solution

$$X_0 : t \mapsto X_0(t) = \begin{pmatrix} x_0(t) \\ y_0(t) \\ z_0(t) \end{pmatrix}$$

Date: 3 Février 2024 8h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

du système différentiel (S) telle que $X_0(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$?

b. Déterminer la solution X_0 de la question précédente.

Partie III - Un second système différentiel. Dans cette partie, on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

6. Déterminer les valeurs propres de B.

7. La matrice B est-elle diagonalisable ?

8. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ tel que B est la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On considère aussi les vecteurs $v_1 = (2, -1)$ et $v_2 = (-1, 0)$.

a. Justifier que $\mathcal{B} = (v_1, v_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. Quelle est la matrice T de l'endomorphisme f dans la base $\mathcal{B}$?

c. Donner une matrice Q inversible telle que $B = QTQ^{-1}$.

9. En déduire la solution du système différentiel

$$(\Sigma) \left\{ \begin{array}{rcl} x' & = & -x - 4y \\ y' & = & x + 3y \end{array} \right. .$$

où x et y sont des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles.

Exercice 2.- EML 2023 Exercice 3.

L'objet de cet exercice est d'introduire la fonction d'entropie qui mesure l'incertitude sur la valeur prise par une variable aléatoire donnée.

Notation.

Dans tout l'exercice n désigne un entier naturel non nul et $[\![1,n]\!]$ désigne l'ensemble des entiers compris entre 1 et n :

$$[\![1,n]\!] = \{k \in \mathbb{N} | \quad 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Les parties II et III sont indépendantes mais utilisent des résultats de la partie I.

Partie I - Préliminaire.

1. Soit $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = \left\{ \begin{array}{rl} x\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{array} \right.$.

- **a.** Démontrer que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.
- **b.** La fonction h est-elle dérivable en 0 ?
- **c.** Déterminer les antécédents de 0 par la fonction h.

2. Pour tout $x \in [0,1]$, on pose $g(x) = -h(x) - h(1-x)$.

Dresser le tableau de variations de la fonction g.

Partie II - Des variables aléatoires discrètes. Si X est une variable aléatoire discrète sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, **l'entropie** de X est, sous réserve d'existence,

$$H(X) = -\sum_{x \in X(\Omega)} h\left(P(X = x)\right).$$

En particulier, lorsque X est à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$, l'entropie de X existe toujours et vaut

$$H(X) = -\sum_{i=1}^{n} h(p_i)$$

où, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, $p_i = P(X = x_i)$.

3. Dans cette question, U est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme discrète sur $[\![1,n]\!]$.

Déterminer $H(U)$.

4. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. Démontrer que $H(X) \leqslant \ln(2)$ avec égalité si et seulement si $p = \frac{1}{2}$. On pourra utiliser la question **2**.

5. Soit X_1 et X_2 deux variables indépendantes qui suivent des lois de Bernoulli de paramètres respectifs p_1 et p_2, définies sur le même espace de probabilité. Soit alors Z la variable telle que

- $Z(\Omega) = \{0,1\}$.
- L'événement $[Z = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement "$X_1 + X_2$ est impair" est réalisé.

On définit le réel p par $p = P(Z = 1)$.

- **a.** Quelles sont les valeurs prises par la variable aléatoire $X_1 + X_2$?
- **b.** Démontrer que $p = p_1(1-p_2) + p_2(1-p_1)$.
- **c.** Vérifier que $1 - 2p = (1-2p_1)(1-2p_2)$.

6. Soit $p \in]0,1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on considère la variable aléatoire Z_n telle que

- $Z_n(\Omega) = \{0,1\}$.
- L'événement $[Z_n = 1]$ est réalisé si et seulement si l'événement "S_n est impair" est réalisé.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Quelle est la loi de la variable aléatoire S_n ?

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 - 2P(Z_n = 1) = (1 - 2p)^n$ (*on pourra raisonner par récurrence*).

c. Démontrer que $H(Z_n) \leqslant \ln(2)$. Dans quel(s) cas a-t-on égalité ?

Partie III - Des variables à densités. Si X est une variable aléatoire sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ de densité f, on dit que X admet une entropie lorsque l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h\circ f(t)dt$ converge absolument ; **l'entropie** de X est alors

$$H(X) = -\int_{-\infty}^{+\infty} h \circ f(t)dt.$$

7. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur $[a, b]$ où a et b sont des réels tels que $a < b$.

a. Démontrer que U admet une entropie.

b. Déterminer $H(U)$.

8. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité f.

a. Justifier de la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} tf(t)dt$ et déterminer sa valeur.

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = 1 - \ln\lambda$.

9. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ où $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. On note ϕ la densité usuelle de la variable aléatoire X.

a. Donner l'espérance et la variance de X. En déduire la valeur de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2\phi(t)dt$.

b. Démontrer que X admet une entropie et que $H(X) = \frac{1+\ln(2\pi\sigma^2)}{2}$.

Exercice 3.- d'après **EDHEC** 2010 Problème.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par les égalités suivantes :

$$f(e_1) = \frac{1}{3}(e_2 + e_3) \quad \text{et} \quad f(e_2) = f(e_3) = \frac{2}{3}e_1$$

Partie 1 : Étude de f.

1. **a.** Écrire la matrice M de f dans la base $\mathcal{B}$.
   b. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ puis celle de $\mathrm{Ker}(f)$.
   c. Donner alors une base de $\mathrm{Ker}(f)$, puis en déduire une valeur propre de M ainsi que le sous-espace propre associé.
   d. Déterminer les autres valeurs propres de M ainsi que les sous-espaces propres associés.
   e. En déduire que M est diagonalisable.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a. Justifier sans calcul que P est inversible, puis déterminer la matrice D diagonale telle que : $M = PDP^{-1}$.
   b. Calculer PQ puis en déduire P^{-1}.
   c. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel j, on a $M^j = PD^jP^{-1}$.
   d. Écrire, pour tout entier naturel j non nul, la première colonne de la matrice M^j. Vérifier que ce résultat reste valable si $j = 0$.

Partie 2 : Étude d'une suite de variables aléatoires. Une urne contient trois boules numérotées de 1 à 3. Un tirage consiste à extraire au hasard une boule de l'urne puis à la remettre dans l'urne pour le tirage suivant.On définit une suite de variables aléatoires $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ de la manière suivante.

- Pour tout entier naturel k non nul, X_k est définie *après* le $k^{\text{ème}}$ tirage.
- On procède au 1^{er} tirage et X_1 prend la valeur du numéro de la boule obtenue à ce tirage.
- Après le $k^{\text{ème}}$ tirage ($k \in \mathbb{N}^*$) :
  - soit X_k a pris la valeur 1, dans ce cas on procède au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur du numéro obtenu à ce $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage.
  - soit X_k a pris la valeur j, différente de 1. Dans ce cas on procède également au $(k+1)^{\text{ème}}$ tirage et X_{k+1} prend la valeur j si la boule tirée porte le numéro j et la valeur 1 sinon.

3. Reconnaître la loi de X_1.
4. Simulation informatique de l'expérience aléatoire décrite dans cette partie.
   On rappelle que rd.randint(1,n+1) simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1, n]\!]$. Compléter le programme suivant pour qu'il simule l'expérience aléatoire décrite dans cette partie et pour qu'il affiche la valeur de la variable X_k, l'entier k étant entré au clavier par l'utilisateur.

```
k = int(input('Entrez un nombre k superieur a 2 : ')
X = rd.randint(1,4)
for i in range(k-1):
   tirage = rd.randint(1,4)
   if X == 1:
     X = ....
     else:
       if tirage != X:
         X = ....
print(X)
```

5. On note U_k la matrice à 3 lignes et une colonne dont l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne est $\mathbb{P}\big([X_k = i]\big)$.

a. Déterminer les probabilités $\mathbb{P}_{[X_k=j]}\big([X_{k+1} = i]\big)$, pour tout couple (i, j) de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$.

b. On admet que $([X_k = 1], [X_k = 2], [X_k = 3])$ est un système complet d'évènements. Déterminer, grâce à la formule des probabilités totales, la matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, telle que, pour tout entier naturel k non nul, on a $U_{k+1} = AU_k$.

c. Montrer qu'en posant $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, alors, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a : $U_k = A^k U_0$.

d. Vérifier : $A = M + \dfrac{1}{3}I$, puis établir que, pour tout k de $\mathbb{N}$, on a :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-j} M^j.$$

e. En déduire les 3 éléments de la première colonne de la matrice A^k, puis vérifier que la loi de X_k est donnée par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbb{P}\big([X_k = 1]\big) = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right) \quad \text{et} \quad \mathbb{P}\big([X_k = 2]\big) = \mathbb{P}\big([X_k = 3]\big) = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^k\right)$$

f. Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X_k)$ de X_k.

g. Écrire une fonction Python, notée `esp`, qui renvoie $\mathbb{E}(X_k)$ à l'appel de `esp(k)`.