DEVOIR NUMÉRO 2

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1.-

1. Déterminer les développements limités à l'ordre 2 au point $x = 0$ de :

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x}$$

2. En déduire la valeur de la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right)}{\sqrt{1+2x} + \sqrt{1-2x} - 2}$$

Exercice 2.-

1. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t).$$

2. Montrer que la fonction $t \mapsto te^{2t}$ est solution particulière de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + e^{2t}.$$

3. Déterminer toutes les fonctions φ définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et solutions de l'équation différentielle

$$\varphi'(t) = 2\varphi(t) + e^{2t}.$$

Date: 22 Septembre 2023 14h00-18h00.
http://louismerlin.fr.

Exercice 3.-

On désigne par I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -4 & -3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. **a.** Calculer $(A-I)(A+I)^2$.

   b. En déduire que A est inversible et déterminer A^{-1}.

2. On note $E_1(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = U\}$.

   a. Résoudre le système suivant : $(S_1)\begin{cases} \phantom{-4x-{}} 2y - 2z = 0 \\ -4x - 4y + 4z = 0 \\ -2x = 0 \end{cases}$.

   b. Déterminer $E_1(A)$.

   c. En déduire que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_1(A)$.

3. On note $E_{-1}(A) = \{U \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \mid A\,U = -U\}$.

   a. Résoudre le système : $(S_{-1})\begin{cases} 2x + 2y - 2z = 0 \\ -4x - 2y + 4z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases}$

   b. Déterminer $E_{-1}(A)$.

   c. En déduire que $E_{-1}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et déterminer une base de $E_{-1}(A)$.

4. On note $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

   a. Démontrer que P est inversible et que $P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

   On détaillera précisément les étapes de calcul.

   b. Montrer que $P^{-1}\,A\,P = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   c. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,T^n\,P^{-1}$.

5. **a.** Exhiber une matrice $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que T s'écrit $T = D + N$, où :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   b. Calculer N^2 et en déduire N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   c. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   Déterminer T^n en fonction des matrices D et N, à l'aide de la formule du binôme de Newton.

Exercice 4.- d'après **ECRICOME 2023** Exercice 2..

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$\forall x \in]0;+\infty[, \qquad f(x) = \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}}$$

On rappelle que $2 < e < 3$.

1. **a.** Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que, pour tout réel x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{(x-1)}{2x} f(x)$$

b. Dresser le tableau de variations de f et déterminer les limites suivantes : $\lim_{x\to 0} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

c. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

d. Montrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'équation $f(x) = n$, d'inconnue x dans $]0;+\infty[$, possède exactement deux solutions u_n et v_n, avec :

$$0 < u_n < 1 < v_n.$$

2. **a.** Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ est croissante.

b. Montrer par l'absurde que la suite $(v_n)_{n\geq 2}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

3. **a.** Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.

b. En déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ converge.

Dans les questions qui suivent, on note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 2}$.

c. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

d. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n^2 u_n = 1$ puis un équivalent simple de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. **a.** Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et ε un réel strictement positif.
On cherche à déterminer une valeur approchée de u_n avec une marge d'erreur inférieure ou égale à ε.
Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un entier `n` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps`, et renvoyant une valeur approchée de u_n à `eps` près en appliquant l'algorithme décrit ci-dessus.

```
import numpy as np

def approx_u(n, eps):
  a = 0
  b = 1
  while __________ :
    c = (a+b)/2
    if np.exp(c/2)/np.sqrt(c) < n:
      __________
    else:
      __________
  return (a+b)/2
```

b. Écrire une fonction en langage Python, nommée `sp`, prenant en entrée un entier `N` supérieur ou égal à 2 et un réel strictement positif `eps` et renvoyant une valeur approchée de la somme $\sum_{n=2}^{N} u_n$ à `eps` près.
On pourra faire appel à la fonction `approx_u` *définie à la question précédente.*

Exercice 5.-

Partie I : Cours en bourse d'une action.

On s'intéresse aux variations journalières d'une action sur un marché financier, qu'on suppose aléatoires. On introduit, pour $j \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire X_j correspondant à l'état de la variation de l'action le jour j. Naturellement, au début de l'observation, l'action n'a pas encore varié et on a $X_0 = 0$. On suppose de plus que, chaque jour, le cours de l'action :

- monte d'une unité $(+1)$ avec probabilité p $(0 < p < 1)$
- ou bien descend d'une unité (-1) avec probabilité $q = 1 - p$.

On note X_{2n} le cours de l'action constaté le $2n$ième jour suivant le début de l'observation.

Par exemple, si $n = 2$ et que le cours a baissé les trois premiers jours et monté le quatrième, on a $X_4 = -1 - 1 - 1 + 1 = -2$.

Enfin, on note

$$p_n = P(X_{2n} \geqslant 0)$$

et on s'intéresse à l'évolution de p_n lorsque n devient grand, c'est-à-dire qu'on cherche à estimer la probabilité, après un grand nombre (pair) de jours, que le cours de l'action soit en hausse.

1. Simulation sous Python.

a. Recopier et compléter la fonction ci-dessous qui renvoie une simulation de X_{2n}.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X_2(n,p) :
  x=0
  for ........... :
    if ........... :
      ..............
    else :
      ..............
  return x
```

b. On ajoute le code de la fonction suivante. Que fait-elle ? Préciser ce que contiennent les variables `L` et `c`

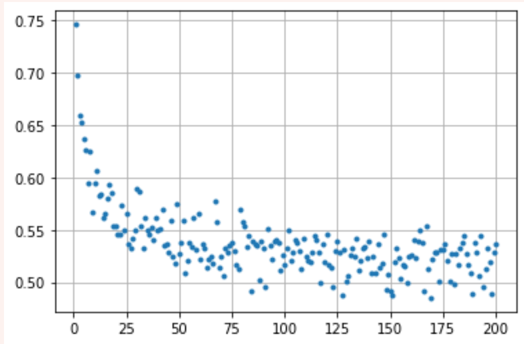
```
def mystere(n) :
  L=[]
  c=0
  for k in range(1000) :
    L.append(simul_X_2(n,p))
  for j in range(1000) :
    if L[j] >= 0 :
      c=c+1
  return c/1000
```

c. Les commandes ci-dessous permettent d'obtenir la figure ci-contre

```python
import matplotlib.pyplot as plt

p=1/2
N=[k for k in range(1,201)]
P=[mystere(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N,P,'.')
plt.show()
```

Affichage Python



Que peut-on conjecturer sur la limite de $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Déterminer $X_{2n}(\Omega)$.

3. On note Y_{2n} le nombre de jours (durant les $2n$ jours d'observation) où l'action a monté et Z_{2n} le nombre de ceux où elle a baissé.

a. Quel lien y a-t-il entre Y_{2n} et Z_{2n} ?

b. Expliciter les lois de Y_{2n} et Z_{2n} et préciser leurs espérances et leurs variances.

4. Quelle autre relation lie X_{2n}, Y_{2n} et Z_{2n} ? En déduire l'expression de $E(X_{2n})$. Interpréter le cas particulier $p = 1/2$.

5. Montrer que pour tout $k \in [\![-n, n]\!]$,

$$P(X_{2n} = 2k) = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}.$$

En déduire une expression de p_n à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.

Partie II : Des coefficients binomiaux

On considère la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{2n}{n+i} = \binom{2n}{n} + \binom{2n}{n+1} + \cdots + \binom{2n}{2n}.$$

6. **a.** Calculer S_1, S_2, S_3.

b. On rappelle qu'en Python, la commande np.prod(liste) permet d'obtenir le produit des valeurs de la liste prise en argument.

(i) Écrire $\binom{2n}{n+i}$ comme un quotient de produits.

(ii) En déduire une fonction Python d'en-tête def suite_S(n) : qui renvoie la valeur de S_n.

c. Justifier que

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} = 2^{2n}.$$

d. En déduire que

$$S_n = 2^{2n-1} + \frac{1}{2}\binom{2n}{n}.$$

On commencera par montrer que

$$\sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} + \binom{2n}{n} = 2S_n.$$

7. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_p = \binom{2p}{p} 2^{-2p}$.

a. Montrer que, pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{p+1} = \frac{2p+1}{2p+2} u_p.$$

b. En déduire, par récurrence, que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,
$$0 \leqslant u_p \leqslant \frac{1}{\sqrt{2p+1}}.$$

c. En déduire la limite de u_p lorsque p tend vers $+\infty$.

8. On revient aux variables aléatoires de la partie **I** et on suppose dans cette question que $p = 1/2$. On rappelle que $p_n = P(X_{2n} \geqslant 0)$.

À l'aide de la question 5, exprimer p_n, à l'aide de S_n, puis montrer que
$$p_n = \frac{1}{2} + \binom{2n}{n} 2^{-(2n+1)}.$$

Que valent p_1, p_2, p_3 ?

Quelle est la limite de $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$. Comparer avec la conjecture faite à l'aide de Python.