CONCOURS BLANC 2 MATHS II

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Une des situations les plus importantes du calcul des probabilités concerne l'évolution de la fortune d'un joueur qui à chaque instant est susceptible de gagner ou de perdre 1 euro suivant le résultat que la hasard amène lors du $n$ième jeu. Cette évolution dans le temps constitue une marche aléatoire dont on étudiera le cas le plus simple, celui où la probabilité de gagner ou perdre un euro au $n$ième jeu vaut $1/2$. On s'intéressera plus particulièrement à la façon dont cette fortune fluctue à travers le temps et on cherchera notamment à obtenir des renseignements sur les instants où le joueur est ruiné, c'est-à-dire où sa fortune devient nulle. Le problème propose d'obtenir des valeurs asymptotiques au sujet des premiers instants et des derniers instants de ruine. La première partie introduit quelques outils techniques, notamment des fonctions périodiques qui sont d'une grande utilité. Dans la deuxième partie, des propriétés élémentaires de la marche aléatoire simple symétrique sont obtenues. La troisième partie étudie alors les temps de dernier passage par 0 de la marche aléatoire.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Pour une variable aléatoire Y, on notera $E(Y)$ son espérance et $\mathrm{Var}(Y)$ sa variance.

Les deux premières parties sont indépendantes de la troisième.

Première partie : Étude d'une fonction périodique.

On admet **l'existence et l'unicité** d'une fonction $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ satisfaisant aux conditions (C1)-(C2) suivantes :

(C1) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s''(t) + s(t) = 0$.

(C2) $s(0) = 0$ et $s'(0) = 1$.

On pose $c(t) = s'(t)$.

1. On commence par démontrer quelques propriétés élémentaires des fonctions s et c.

- **a.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c'(t) = -s(t)$.
- **b.** On pose $h(t) = c^2(t) + s^2(t)$. Montrer que h est une fonction constante.
- **c.** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c^2(t) + s^2(t) = 1$.
- **d.** Montrer que s et c sont bornées sur $\mathbb{R}$.

2. On montre dans cette question qu'il existe $\theta > 0$ tel que $s(\theta) = 0$. On raisonne par l'absurde en supposant que, pour tout $\theta > 0$, $s(\theta) \neq 0$.

- **a.** Montrer que pour tout $\theta > 0$, $s(\theta) > 0$ et $s''(\theta) < 0$.
- **b.** (i) Montrer que $c(t)$ admet une limite ℓ lorsque $t \to +\infty$.
  - (ii) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = \displaystyle\int_0^t c(x)dx$.
  - (iii) Montrer que $\ell = 0$. (*Indication : on raisonnera par l'absurde en supposant que $\ell > 0$ ou $\ell < 0$.*)
- **c.** (i) Montrer que $c(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$.
  - (ii) Montrer que $s(t)$ admet une limite $\gamma > 0$ quand $t \to +\infty$.
  - (iii) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $c(t) = 1 - \displaystyle\int_0^t s(x)dx$.

Date: 7 Mars 2024 8h30-12h30.

http://louismerlin.fr.

(iv) Conclure.

On a donc montré que s s'annule sur $\mathbb{R}_+^*$. On **admettra** que la plus petite valeur d'annulation de s est π.

À l'aide des conditions (C1) et (C2), on peut aussi montrer facilement, et **on l'admettra**, que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $s(-t) = -s(t)$ (c'est-à-dire que la fonction s est impaire) et $s(t) = s(\pi - t)$.

3. **a.** Montrer que c est une fonction paire.

b. Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(t) = s(t + 2\pi)$ vérifie aussi les conditions (C1)-(C2). En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t + 2\pi) = s(t)$. La fonction s est donc **périodique** de période 2π.

c. Montrer que c est périodique de période 2π.

d. (i) Montrer qu'il existe un unique $\theta \in]0, \pi[$ tel que $c(\theta) = 0$.

(ii) Montrer que s admet en θ son maximum sur $[0, \pi]$.

(iii) Montrer que $\theta = \frac{\pi}{2}$.

(iv) On pose $\gamma(t) = c\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que γ satisfait (C1)-(C2). En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $s(t) = c\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $R(t) = \begin{pmatrix} c(t) & -s(t) \\ s(t) & c(t) \end{pmatrix}$.

a. Calculer $R(0)$.

b. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer le déterminant de $R(t)$.

c. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, calculer l'inverse de $R(t)$.

d. Discuter en fonction de t l'existence de valeurs propres pour $R(t)$.

e. (i) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ un réel fixé. On définit la fonction ψ_θ en posant pour $t \in \mathbb{R}$, $\psi_\theta(t) = s(t-\theta)c(\theta) + c(t - \theta)s(\theta)$. Montrer que ψ_θ satisfait les conditions (C1)-(C2).

(ii) Montrer que pour tout couple de réels (u, v), on a $s(u + v) = s(u)c(v) + s(v)c(u)$.

(iii) Montrer que pour tout couple de réels (u, v), on a aussi $c(u + v) = c(u)c(v) - s(u)s(v)$.

(iv) Pour tout couple de réels (u, v), calculer le produit $R(u)R(v)$.

5. **a.** Montrer que s est strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Montrer que s définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$.
On note a la bijection réciproque.

6. **a.** (i) Montrer que a est dérivable sur $]-1, 1[$.

(ii) Montrer que $c(a(t)) = \sqrt{1 - t^2}$ pour tout $t \in [-1, 1]$.

(iii) Montrer que, pour tout $t \in]-1, 1[$, on a $a'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

b. (i) Montrer que $a(1) = \frac{\pi}{2}$ et $a(-1) = \frac{-\pi}{2}$.

(ii) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1 - t^2}} dt = \pi$.

(iii) Montrer que la fonction g définie par $g(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-t^2}}$ pour tout $t \in]-1, 1[$ et $g(t) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R} \backslash]-1, 1[$, est une densité de probabilités.

Deuxième Partie : intégrale de Gauss

On considère une suite d'intégrale $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} c^n(t) dt,$$

où c est la fonction étudiée dans la partie précédente. Celle-ci étant continue sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie

7. Calculer W_0 et W_1.

8. À l'aide d'un changement de variable affine et de la question **3.d.**(iv), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} s^n(t)dt,$$

où s est la fonction étudiée dans la partie I.

9. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geqslant 0$ et que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

10. À l'aide d'une intégration par parties et de la question **1.c**, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+2} = (n+1)W_n - (n+1)W_{n+2}.$$

En déduire que

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}W_n.$$

11. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $J_n = (n+1)W_nW_{n+1}$.
En calculant $J_{n+1} - J_n$, montrer que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et préciser sa valeur.

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{W_{n+2}}{W_n} \leqslant \frac{W_{n+1}}{W_n} \leqslant 1.$$

13. Montrer que $W_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} W_n$. Obtenir finalement que

$$W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}.$$

On s'intéresse maintenant au calcul de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$ (sans faire appel au résultat admis en cours).

14. Justifier soigneusement la convergente de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

15. Montrer que, pour tout $t \in [0,1[$, $\ln(1-t) \leqslant -t$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Déduire de la question précédente que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx.$$

17. Montrer de même, qu'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n dx.$$

18. À l'aide du changement de variable $x = \sqrt{n}c(u)$, montrer que

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n+1}.$$

On admet que le changement de variable $x = \sqrt{n}\frac{s(u)}{c(u)}$ est licite et permet d'obtenir

$$\int_0^{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^n dx = \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

On a dont l'encadrement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sqrt{n}W_{2n+1} \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-x^2}dx \leqslant \sqrt{n}W_{2n-2}.$$

19. À l'aide de la question **13**, conclure sur la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Troisième partie : Propriétés élémentaires des marches aléatoires.

On considère une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires indépendantes et de même loi, telles que

$$P(X_1 = 1) = P(X_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_0 = 0$ et $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

20. Commençons par quelques généralités.

a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $X_n = S_n - S_{n-1}$.

b. (i) Calculer $E(X_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(ii) En déduire $E(S_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

c. (i) Calculer $\text{Var}(X_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

(ii) En déduire $\text{Var}(S_n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

d. Soit $\varepsilon > 0$.

(i) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$P\left(|S_n| > n\varepsilon\right) \leqslant \frac{\text{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2}$$ [1].

(ii) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) = 0$.

21. On cherche à simuler la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On rappelle que la fonction rd.rand() (après appel de la bibliothèque numpy.random sous l'alias rd) renvoie un nombre aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$.

a. Compléter la fonction python suivante dont un appel X() renvoie un nombre aléatoire de même loi que X_i.

```python
import numpy.random as rd

def X() :
  if ...... :
    x = 1
  else :
    x = -1
  return x
```

b. Compléter la fonction python suivante, qui prend en argument un entier k et renvoie la liste $[S_0, S_1, \cdots, S_k]$ des k premières valeurs de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser la fonction X de la question précédente.

```python
import numpy.random as rd

def marche(k) :
  S=[0]
  for i in range(k) :
    S.append(........)
  return S
```

22. Dans cette question, on fixe un entier $n \geqslant 1$. On note N_+ la variable aléatoire qui compte le nombre d'indices $1 \leqslant k \leqslant n$ tels que $X_k = 1$. De même N_- est la variable aléatoire qui compte les indices entre 1 et n pour lesquels $X_k = -1$.

a. Montrer que $n = N_+ + N_-$.

b. Montrer que $S_n = N_+ - N_-$.

c. Montrer que $N_+ = \frac{1}{2}(n + S_n)$.

1. Cette question utilise le chapitre 14 du cours, on pourra admettre le résultat pour poursuivre.

d. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on pose $Y_k = \frac{1}{2}(1 + X_k)$.

(i) Montrer que $N_+ = \sum_{k=1}^{n} Y_k$.

(ii) Déterminer la loi de Y_k.

(iii) Déterminer la loi de N_+.

e. Soit j un entier tel que $-n \leqslant j \leqslant n$. Montrer que

$$P(S_n = j) = \binom{n}{\frac{n+j}{2}} \frac{1}{2^n}.$$

23. On considère la suite de réels positifs $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\phi_0 = 0$ et pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\phi_n = P\left((S_1 \leqslant 0) \cap (S_2 \leqslant 0) \cap \cdots \cap (S_{n-1} \leqslant 0) \cap (S_n = 1)\right).$$

Autrement dit, ϕ_n est la probabilité que pour la première fois au temps n, S_n devienne strictement positif.

a. Calculer ϕ_1

b. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\phi_{2n} = 0$.

c. Pour $k \geqslant 1$, on considère les événements

$$A_k = [(S_1 = -1) \cap (S_2 \leqslant -1) \cap \cdots \cap (S_{k-1} \leqslant -1) \cap (S_k = 0)]$$

et

$$B_{k,n} = [(S_{k+1} - S_k \leqslant 0) \cap \cdots \cap (S_{n-1} - S_k \leqslant 0) \cap (S_n - S_k = 1)].$$

(i) Montrer que pour tout $k \geqslant 1$, on a $P(A_{k+1}) = \frac{1}{2}\phi_k$.

(ii) Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $\phi_{n+1} = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_{k+1} \cap B_{k+1,n+1}\right)$.

(iii) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $\phi_{n+1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \phi_k \phi_{n-k}$.

d. Pour s réel, on considère la série $\Phi(s) = \sum_{n\geqslant 1} \phi_n s^n$.

(i) Montrer que Φ est bien définie pour $s \in [0,1]$.

(ii) Montrer que pour tout s réel et tout entier $m \geqslant 1$, on a

$$\left(\sum_{j=1}^{m} \phi_j s^j\right)\left(\sum_{k=1}^{m} \phi_k s^k\right) = \sum_{n=2}^{2m} s^n \left(\sum_{\substack{j,k=1 \\ j+k=n}}^{m} \phi_k \phi_j\right).$$

(iii) En déduire que pour tout $s \in [0,1]$ et tout entier $m \geqslant 1$, on a l'encadrement

$$\sum_{n=2}^{m} s^n \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_k \phi_{n-k}\right) \leqslant \left(\sum_{n=1}^{m} \phi_n s^n\right)^2 \leqslant \sum_{n=2}^{2m} s^n \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_k \phi_{n-k}\right)$$

(iv) Conclure que pour tout $s \in [0,1]$, on a $(\Phi(s))^2 = \sum_{n\geqslant 2} s^n \left(\sum_{k=1}^{n} \phi_k \phi_{n-k}\right)$.

(v) Montrer que pour tout $s \in [0,1]$, on a $\Phi(s) - \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}s\Phi(s)^2$.

(vi) Montrer que $\Phi(1) = 1$.

(vii) Soit A l'événement : *il existe un instant n tel que* $S_n = 1$. Montrer que $P(A) = 1$.

24. Soit T la variable aléatoire qui vaut le plus petit indice k tels que $S_k = 1$, avec la convention que $T = +\infty$ si un tel indice n'existe pas.

a. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, $\phi_n = P(T = n)$.

b. Montrer que $P(T = +\infty) = 0$.

c. Compléter la fonction python suivante, qui permet de simuler la variable T. *On pourra utiliser les appels aux fonctions de la question **21**.*

```python
import numpy.random as rd

def T() :
  S = 0
  k = 0
  while S<1 :
    .......
  return k
```

d. On **admet** que $\Phi(s) = \sum\limits_{n\geqslant 1} \phi_n s^n$ est dérivable sur $[0,1[$ et que $\Phi'(s) = \sum\limits_{n\geqslant 1} n\phi_n s^{n-1}$.

(i) Montrer que $\lim\limits_{s\to 1} \Phi'(s) = +\infty$.

(ii) Montrer que T n'admet pas d'espérance[2].

2. Question bancale, une explication convaincante me suffira.