CONCOURS BLANC 2 MATHS I

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1 (difficile)

Soient n et m deux entiers supérieurs ou àgaux à 2 fixés. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) \subset [\![0, n]\!]$ et $Y(\Omega) \subset [\![0, m]\!]$ et le couple $Z = (X, Y)$.
Pour $(i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!]$, on note $p_{i,j} = P([X = i] \cap [Y = j])$ et on introduit les fonctions G_X, G_Y définies sur $\mathbb{R}$ par

$$G_X(x) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X = i)x^i, \quad G_Y(x) = \sum_{i=0}^{m} \mathbb{P}(Y = i)x^i,$$

et la fonction G_Z définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$G_Z(x, y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} p_{i,j} x^i y^j.$$

1. Calculer $G_Z(1, 1)$. Exprimer $E(X)$, $E(Y)$, $E(XY)$ et $\mathrm{cov}(X, Y)$ à l'aide des dérivées partielles d'ordres 1 et 2 de G_Z évaluées en $(1, 1)$.

2. On considère une fonction polynomiale $f : \ (x, y) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} a_{i,j} x^i y^j$. Montrer que,

$$\big(\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = 0\big) \iff (\forall (i, j) \in [\![0, n]\!] \times [\![0, m]\!], \quad a_{i,j} = 0)\,.$$

3. Déduire de la question précédente que X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $G_Z(x, y) = G_X(x)G_Y(y)$.

4. Une urne contient des jetons portant chacun une des trois lettres A, B ou C. La proportion des jetons A (resp. B, C) dans l'urne est égale à $p \in]0, 1[$ (resp. $q, r \in]0, 1[$) avec $p + q + r = 1$. On effectue n tirages (avec $n \in \mathbb{N}^*$) avec remise dans cette urne et on note X (resp. Y) la variable aléatoire correspondant au nombre de jetons A (resp. B) piochés.

- **a.** Déterminer la loi de X et celle de Y puis les expressions de G_X et G_Y.
- **b.** Déterminer la loi de $Z = (X, Y)$ puis l'expression de G_Z.
- **c.** Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- **d.** Déterminer $\mathrm{cov}(X, Y)$. Le résultat était-il prévisible ?

Date: 4 Mars 2024 8h30-12h30.
http://louismerlin.fr.

Exercice 2 : ECRICOME 2023 sujet 0

Partie I.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^3 - 3x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f.

1. Étudier la parité de f sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer les variations de f sur $[0, +\infty[$, et calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. Montrer que f est convexe sur $[0, +\infty[$ et justifier que le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.

4. On note T la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
Déterminer une équation de T et préciser la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

5. Tracer, sur une même figure, l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ (sur $\mathbb{R}$) et de la droite T.

6. Soit a un réel.

a. Montrer que si $|a| < 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue x possède exactement trois solutions réelles.

b. Montrer que si $|a| > 2$, alors l'équation $x^3 - 3x + a = 0$, d'inconnue x, possède une unique solution réelle.

Partie II.

Pour tout réel a, on considère la matrice

$$A_a = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

7. **a.** Calculer $A_a^3 - 3A_a + aI_3$.

b. Soit λ un réel tel que $\lambda^3 - 3\lambda + a = 0$ et soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}$.

Exprimer A_aX en fonction de λ et X.

c. Déduire des deux questions précédentes que pour tout réel λ :

$$\lambda \text{ est valeur propre de } A_a \iff \lambda^3 - 3\lambda + a = 0.$$

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose $a = 2$.

a. Déterminer les valeurs propres et une base de chaque sous-espace propre de $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

b. La matrice A_2 est-elle diagonalisable ?

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose $|a| > 2$.
La matrice A_a est-elle diagonalisable ?
Indication : On pourra utiliser le résultat de la question 6.

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $a \in]-2, 2[$.

a. Montrer que A_a est diagonalisable.
Indication : On pourra utiliser le résultat de la question 6.

b. On note λ, μ, ν les valeurs propres de A_a. On considère les matrices $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda & \mu & \nu \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 \end{pmatrix}$.

Justifier que P est inversible.

Exprimer A_a en fonction de D et P.

Partie III.

Pour tout réel a, on considère l'équation différentielle $(\mathcal{E}_a)$ suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$(\mathcal{E}_a) : \qquad y''' - 3y' + ay = 0.$$

11. Dans cette question uniquement, on suppose que $a = 0$.

a. Soit y une solution de l'équation $(\mathcal{E}_0) : y''' - 3y' = 0$. Déterminer la forme générale de la fonction y' [1].

b. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation $(\mathcal{E}_0)$.

Dans la suite de l'exercice, pour toute fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on note $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \end{pmatrix}$ et $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \end{pmatrix}$.

12. Montrer que pour tout réel a, y est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_a)$ si et seulement si $Y' = A_a Y$.

13. Dans cette question uniquement, on suppose que $a \in \left]-2, 2\right[$.

a. Montrer qu'une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_a)$ si et seulement si $Z' = DZ$, où $Z = P^{-1}Y$, où D et P sont définies à la question **10.b**.

b. Montrer que les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_a)$ sont les fonctions y définies par une expression de la forme,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad y(x) = \alpha_1 e^{\lambda x} + \alpha_2 e^{\mu x} + \alpha_3 e^{\nu x},$$

où α_1, α_2 et α_3 sont des réels.

c. Vérifier en particulier que les résultats de **11.b** et **13.b** sont cohérents.

1. J'ai recopié le texte d'ECRICOME tel quel mais la question me semble mal posée. Je reformule : Montrer que y' est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants. Résoudre cette équation et en déduire la forme des fonctions y'.

Exercice 3 : EDHEC 2023

On considère deux réels a et b ainsi que la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1. a. Montrer que si $a = b$, alors A ne possède qu'une seule valeur propre.

b. En déduire par l'absurde que, si $a = b$, la matrice A n'est pas diagonalisable.

2. On suppose dans cette question que $a \neq b$.

a. Quelles sont les valeurs propres de A ?

b. Calculer $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$. Qu'en déduire concernant les vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix}$?

c. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ b-a \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ puis écrire la matrice P de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ à la base $\mathcal{B}$.

d. Déterminer une matrice diagonale D telle que $AP = PD$, puis conclure que A est diagonalisable.

3. On considère deux variables aléatoires, X et Y, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$.

a. Établir l'égalité :

$$\mathbb{P}([X = Y]) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}([X = n])\mathbb{P}([Y = n])$$

b. En déduire explicitement $\mathbb{P}([X = Y])$.

4. a. Soit $A(X, Y)$ la matrice aléatoire définie par $A(X, Y) = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}$. Déterminer la probabilité p pour que $A(X, Y)$ ne soit pas diagonalisable.

b. On considère le script Python suivant :

```python
m=int(input('entrez une valeur entiere pour m :'))
c=0
for k in range(m):
  X=rd.geometric(1/2)
  Y=rd.geometric(1/2)
  if X==Y:
    c=c+1
i = 1-c/m
print(i)

```

Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, de quel réel le contenu de la variable i est-il proche ?

Exercice 4 : EDHEC 2023 Problème

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité. On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.

a. Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X>t]}([X \leqslant tx])$.

b. En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $[X > t]$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente. On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty, 1[$, strictement positive et continue sur $[1, +\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $\mathbb{P}([Y > t]) > 0$.
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $[Y > t]$, est la loi de Y.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

5. a. Établir l'égalité pour tout $x \geqslant 1$ et pour tout $t > 1$,

$$G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

b. Justifier que G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et en déduire que pour tout $x \geqslant 1$ et pour tout $t > 1$,

$$G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

c. Montrer enfin la relation pour tout $t > 1$,

$$G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1, +\infty[$, associe $y(t)$.

On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c}y' = 1$.

Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

a. Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1, +\infty[$.

b. En notant K la constante évoquée à la question **6.a**, donner toutes les solutions de (E_1).

c. Trouver une fonction u, constante sur $]1, +\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

d. Montrer l'équivalence : h solution de (E_2) si et seulement si $h - u$ solution de (E_1).

e. En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par, pour tout $t > 1$,

$$h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. **a.** Montrer finalement que l'on a, pour tout $t > 1$,

$$G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

b. Vérifier que cette relation s'étend à $[1, +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c.

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

a. Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

b. En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

c. Écrire une fonction Python d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.