CONCOURS BLANC ÉPREUVE I

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1

On considère la fonction f qui à tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe le réel :

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2\,(x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

2. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de f.

b. Montrer que le gradient de f est nul si, et seulement si, on a : $\left\{\begin{array}{rcl} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{array}\right.$.

c. En déduire que f possède trois points critiques : $(0,0)$, $(\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

3. **a.** Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f.

b. Écrire la matrice hessienne de f en chaque point critique.

c. Déterminer les valeurs propres de chacune de ces trois matrices puis montrer que f admet un minimum local en deux de ses points critiques. Donner la valeur de ce minimum.

d. Déterminer les signes de $f(x, x)$ et $f(x, -x)$ au voisinage de $x = 0$.
Conclure quant à l'existence d'un extremum en le troisième point critique de f.

4. **a.** Pour tout (x, y) de $\mathbb{R}^2$, calculer $f(x, y) - (x^2 - 2)^2 - (y^2 - 2)^2 - 2(x + y)^2$.

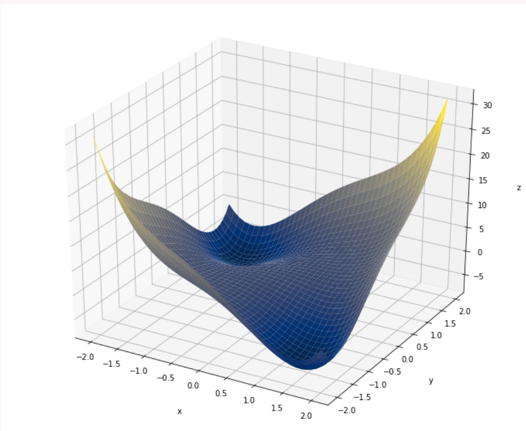
b. Que peut-on déduire de ce calcul quant au minimum de f ?

5. **a.** Compléter la deuxième ligne du programme suivant afin de définir la fonction f en Python.

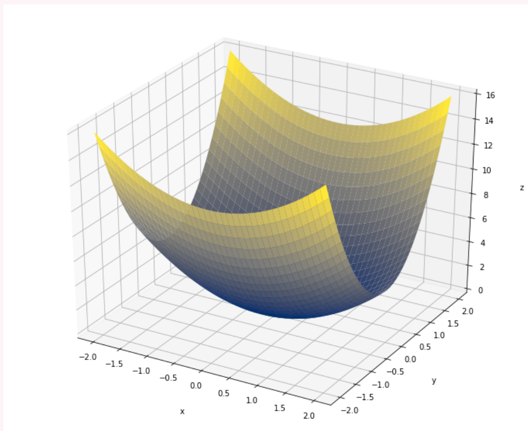
```
def f(x,y):
    return ................
```

b. On utilise la fonction précédente pour tracer le graphe de f et Python renvoie l'une des trois nappes suivantes. Laquelle ? Justifier la réponse.

Graphe 1

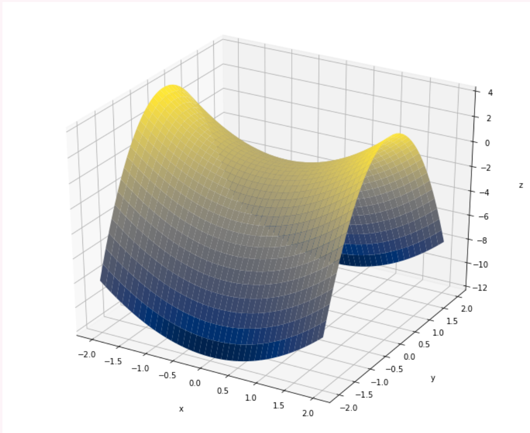


Graphe 2



http://louismerlin.fr.

Graphe 3



EXERCICE 2

Partie 1 : étude de quelques propriétés d'une variable aléatoire X.

Dans cette exercice, θ désigne un réel élément de $\left]0, \frac{1}{2}\right[$.

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta x^{1+\frac{1}{\theta}}} & \text{si} \quad x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si} \quad x < 1 \end{cases}.$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.

On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition.

2. Montrer que X possède une espérance et une variance et les déterminer.

3. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et θ.

4. **a.** Montrer que l'équation $F(x) = \dfrac{1}{2}$ possède une seule solution, notée M_e, que l'on déterminera.

b. Montrer que : $\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, $2^x(1-x) \leqslant 1$.

c. Comparer $E(X)$ et M_e.

5. Soit a un réel supérieur ou égal à 1 et b un réel strictement positif.

a. Montrer que $P_{(X>a)}(X > a+b) = \left(\dfrac{a}{a+b}\right)^{1/\theta}$.

b. Déterminer la limite de cette quantité lorsque a tend vers $+\infty$. Interpréter cette dernière valeur si l'on admet que la variable X représente la durée de vie d'un certain appareil.

Partie 2 : simulation de X.

6. On pose $Y = \ln(X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note G sa fonction de répartition.

a. Pour tout réel x, exprimer $G(x)$ à l'aide de la fonction F.

b. En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

7. On rappelle qu'en `Python`, la commande `rd.exponential(1/lambda)` simule une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Écrire des commandes `Python` permettant de simuler X.

Partie 3 : Estimation d'un paramètre.

On suppose dans la suite que le paramètre θ est inconnu et on souhaite en trouver une estimation ponctuelle puis par intervalle de confiance.

On considère pour cela n variables aléatoires $Y_1, \ldots, Y_n$ toutes définies sur le même espace probabilisé, mutuellement indépendantes, et suivant toutes la même loi que Y.

8. On pose $T_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$.

a. Justifier que T_n est un estimateur de θ.

b. T_n est-il un estimateur sans biais de θ ?

c. Calculer le risque quadratique de T_n en tant qu'estimateur de θ. T_n est-il un estimateur convergent de θ ?

9. **a.** Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev pour la variable T_n.

b. Établir l'inégalité :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad P\Big(\theta \in [T_n - \varepsilon, T_n + \varepsilon]\Big) \geqslant 1 - \frac{\theta^2}{n\varepsilon^2}$$

c. En utilisant le fait que $\theta \leqslant \dfrac{1}{2}$, déterminer un intervalle de confiance pour θ au niveau de confiance 90% lorsqu'on choisit $n = 1000$.

Exercice 3

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on définit la matrice $M(a, b, c)$ par :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 \\ 1 & 1 & 1+c \end{pmatrix}$$

Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on appelle cardinal de l'ensemble $\{a, b, c\}$, noté $\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big)$, le nombre d'éléments distincts de cet ensemble.
Par exemple, si $a = b = c$, alors $\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 1$; si $a = b$ et $a \neq c$, alors $\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 2$.
Pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, on s'intéresse dans ce problème au nombre de valeurs propres distinctes de la matrice $M(a, b, c)$ et on souhaite démontrer la propriété $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad M(a,b,c) \text{ est inversible } \iff ab + bc + ac + abc \neq 0$$

Partie A : Généralités.

1. Justifier que, pour tout (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$, la matrice $M(a, b, c)$ est diagonalisable.

2. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

a. Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ ne peut pas admettre une unique valeur propre.
On pourra par exemple raisonner par l'absurde.

b. En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet soit deux soit trois valeurs propres distinctes.

3. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
On pose f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $M(a, b, c)$.

a. Écrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_1, e_3)$.

b. En déduire que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(b, a, c)$ ont les mêmes valeurs propres.

c. De la même façon, montrer que les matrices $M(a, b, c)$ et $M(a, c, b)$ ont les mêmes valeurs propres.

Ces deux derniers résultats permettent de justifier que les valeurs propres de la matrice $M(a, b, c)$ ne dépendent pas de l'ordre des réels du triplet (a, b, c).

Partie B : Cas où Card$\big(\{a,b,c\}\big) = 1$.

4. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = c = 0$ et on note $J = M(0,0,0)$.

a. Calculer J^2. Déterminer alors un polynôme annulateur de J.

b. En déduire les valeurs propres de J et préciser une base des sous-espaces propres de J.

c. Déterminer une matrice P inversible de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que : $J = PDP^{-1}$.

5. Soit $a \in \mathbb{R}$.

a. Vérifier : $M(a,a,a) = P\,(a\,I_3 + D)\,P^{-1}$.

b. En déduire que la matrice $M(a,a,a)$ admet exactement deux valeurs propres distinctes et les déterminer en fonction de a.

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,a)$.

Partie C : Cas où Card$\big(\{a,b,c\}\big) = 2$.

6. Dans cette question **uniquement**, on suppose que $a = b = 0$ et que $c \in \mathbb{R}^*$.
On note $C = M(0,0,c)$.

a. Justifier que 0 est une valeur propre de C.

b. Soit λ un réel non nul.

(i) Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Montrer l'équivalence :

$$CX = \lambda X \iff \left\{ \begin{array}{rcl} y & = & x \\ z & = & (\lambda - 2)\,x \\ \big(\lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c\big)\,x & = & 0 \end{array} \right.$$

(ii) En déduire : λ est une valeur propre de $C \iff \lambda^2 - (c+3)\,\lambda + 2c = 0$.

c. Montrer alors que C admet trois valeurs propres distinctes.

7. Soit $(a,c) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \neq c$.

a. Exprimer $M(a,a,c)$ comme une combinaison linéaire de I_3 et de $M(0,0,c-a)$.

b. En déduire que la matrice $M(a,a,c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

c. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a,a,c)$.

8. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que Card$\big(\{a,b,c\}\big) = 2$. À l'aide de la conclusion de la question **3**, montrer que la matrice $M(a,b,c)$ admet trois valeurs propres distinctes et vérifier la propriété $(*)$ dans ce cas.

Partie D : Cas où Card$\big(\{a,b,c\}\big) = 3$.

9. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $a < b < c$.
On note g la fonction définie sur l'ensemble $D = \mathbb{R} \setminus \{a,b,c\}$ par :

$$\forall x \in D, \quad g(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c}$$

a. Dresser le tableau de variations de g sur D en y précisant les limites en $+\infty$, en $-\infty$, ainsi qu'à gauche et à droite de a, de b et de c.

b. En déduire que l'équation $g(x) = 1$, d'inconnue $x \in D$, admet exactement trois solutions distinctes λ_1, λ_2, λ_3, vérifiant : $a < \lambda_1 < b < \lambda_2 < c < \lambda_3$.

c. Soit $\lambda \in D$ une solution de l'équation $g(x) = 1$.

On note X_λ la matrice colonne de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par : $X_\lambda = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\lambda - a} \\ \dfrac{1}{\lambda - b} \\ \dfrac{1}{\lambda - c} \end{pmatrix}$.

Montrer que X_λ est un vecteur propre de la matrice $M(a, b, c)$ associé à la valeur propre λ.

d. En déduire que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

10. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Card}\big(\{a, b, c\}\big) = 3$.

a. Montrer que la matrice $M(a, b, c)$ admet trois valeurs propres distinctes.

b. Vérifier la propriété $(*)$ pour la matrice $M(a, b, c)$.

11. On pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

a. Justifier que la matrice A est inversible.

b. On note α la plus grande valeur propre de A.

(i) Montrer : $4 < \alpha < 5$.

(ii) Recopier et compléter les lignes incomplètes de la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie une valeur approchée de α à 10^{-3} près à l'aide de la méthode de dichotomie.

```
def valeur_approchee():
    x = 4
    y = 5
    while ..... :
        m = (x+y)/2
        if 1/m + 1(m-1) + 1(m-2) ..... :
            .....
        else :
            .....
    alpha = .....
    return alpha
```