



DEVOIR MAISON IV

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Vrai ou Faux ?

Date: 8 Janvier 2024.

<http://louismerlin.fr>.

Exercice 1.- Comparaisons de suites et de fonctions.

1	$e^x = \mathbf{o}_{x \rightarrow 0}(\ln(x))$	
2	$e^x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} 1 + x + x^2/2$	
3	Si (u_n) vérifie (pour tout $n \in \mathbb{N}$), $n \leq u_n \leq n + n^2 + \frac{1}{n}$ alors $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$	
4	$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$	
5	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sqrt{1+x}-2-x}{2x^2} = \frac{1}{4}$.	
6	$\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 0$	
7	$\forall k \in \mathbb{N}, \binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.	
8	$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = e^2$.	
9	$\ln(n+1) - \ln(n) = \mathbf{o}_{n \rightarrow +\infty}(1)$.	
10	$e^{x^2} = 1 + x^2 + \mathbf{o}_{x \rightarrow 0}(x^3)$.	
11	$x^2 - 3x + 2 = 2 + \mathbf{o}_{x \rightarrow 0}(1)$.	
12	$x^2 - 3x + 2 = 2 + \mathbf{o}_{x \rightarrow 1}(1)$.	
13	$\frac{x \ln(x)}{x-1} \underset{x \rightarrow 1}{\sim} x$.	
14	Si $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$, alors $u_n + v_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2u_n$	

Exercice 2.- Suites et séries.

1	Si f est croissante alors (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ est croissante.	
2	Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$, alors la série $\sum u_n$ converge.	
3	Si $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors la série $\sum u_n$ converge.	
4	Avec $u_n = \frac{2n - \ln(n) + 1}{n^2 \sqrt{n} + 3n - 1}$ la série $\sum u_n$ converge.	
5	Si $u_n \geq 0$ et que $u_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ alors la série $\sum u_n$ diverge.	
6	La série $\sum \left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$ converge.	
7	Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n - v_n)$ diverge.	
8	Si $u_n \geq 0$ et $\sum_{k=1}^n u_k \leq \frac{1}{n} + 1$, alors la série $\sum u_n$ converge.	
9	Si $u_n \geq 0$ et $\sum u_n$ converge alors $\sum u_n^2$ converge.	
10	$\sum u_n$ converge, où $u_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	
11	La série $\sum u_n$ diverge, où $u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2}$	
12	La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{e^n u_n}$ converge.	

Exercice 3.- *Espaces vectoriels.*

1	Un espace vectoriel contient toujours le nombre réel 0.	
2	\mathbb{R}^2 est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^3	
3	$\mathbb{R}_2[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.	
4	$F = \{(x + y, -y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^2 .	
5	$F = \{(x + y, -y, 0) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ est engendré par deux vecteurs non colinéaires.	
6	$\text{Vect}((1, 1), (1, 2), (3, 3)) = \text{Vect}((-1, 0), (1, 1))$.	
7	$\text{Vect}((1, 1), (2, 2), (3, 3)) = \text{Vect}((-1, 0), (1, 1))$.	
8	La famille $(X^2 - 1, X^2 + 1, X^2)$ est libre.	
9	Si $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$, alors (u_1, u_2, u_3) est libre.	
10	Si $u_3 \in \text{Vect}(u_1, u_2)$, alors $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3) = \text{Vect}(u_1, u_2)$.	
11	La famille $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$ est génératrice dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.	
12	$(0, 0, 1)$ a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ dans la base $((0, 0, 1), (1, 0, 0), (0, -1, 0))$	

Exercice 4.- *Intégration.*

1	Si $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, alors $\int_1^{+\infty} f(t)dt$ converge.	
2	Si $\int_0^{+\infty} f(t)dt$ converge absolument alors $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge.	
3	$\int_0^1 \frac{e^{t^2} - 1}{t} dt$ converge.	
4	$\int_0^{+\infty} \frac{dt}{t^4 + t}$ converge.	
5	Si f est impaire alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 0$.	
6	Si f est positive et paire et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} t^3 f(t) = 0$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)dt = 0$.	
7	$\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+t))^2}{(1+t)^2} dt$ converge.	
8	$\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln(t)^2} = \int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$	
9	Si f est \mathcal{C}^2 sur $[0; 1]$ et que $f(0) = f'(0)$ alors $\int_0^1 \frac{f(t)}{t^2} dt$ diverge.	
10	Si $\int_0^1 f(t)dt \geq 0$, alors $f(t) \geq 0$ sur $[0; 1]$.	
11	Si f est continue sur $[a; b]$ alors il existe une constante $M \geq 0$ telle que $\int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$.	
12	$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{2x^2} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^2} = 1$.	

Exercice 5.- Applications linéaires.

1	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si $\dim(\text{Ker}(f)) = 1$ alors f est injective.	
2	La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible.	
3	La matrice de l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$, $P \mapsto P + 2P'$ est donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
4	L'endomorphisme de la question précédente est un automorphisme.	
5	Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{rg}(f) = \dim(E)$ alors f injective.	
6	Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Si $\text{rg}(f) = \dim(E)$ alors f surjective .	
7	Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, alors $\text{Ker}(f) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$.	
8	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$. Alors, pour tout $u \in E$, $(u, f(u))$ est liée.	
9	Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f \circ f = 0$. Alors $\text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$.	