DEVOIR MAISON III

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

Exercice 1.- *Suites.*
On considère la fonction f définie sur $[0,1[$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} & \text{si } x \in]0,1[\\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Partie A : étude de la fonction f.

1. Montrer que f est continue sur $[0,1[$.

2. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et que l'on a, pour tout $x \in]0,1[$,

$$f'(x) = \frac{1}{x(1-x)\left(\ln(x)\right)^2}\left(-x\ln(x) - (1-x)\ln(1-x)\right).$$

4. **a.** Justifier que pour tout $t \in]0,1[$, $t\ln t < 0$.

b. En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0,1[$.

5. Calculer la limite de f en 1. Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?

6. Tracer l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé en faisant figurer la tangente en 0 et les éventuelles branches infinies.

Partie B : Résolution de l'équation $f(x) = x$.

On introduit la fonction g définie sur $]0,1[$ par

$$g(x) = \ln(1-x) - x\ln(x).$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,1[$ et calculer, pour tout $x \in]0,1[$, $g'(x)$ et $g''(x)$.

2. Dresser le tableau de variations de g'. Justifier qu'il existe un unique nombre réel $\beta \in]0,1[$ tel que $g'(\beta) = 0$. En déduire le tableau de signe de $g'(x)$ sur $]0,1[$.

3. Déduire des questions précédentes les variations de g. Trouver le signe de $g(\beta)$. En déduire qu'il existe un unique réel $\alpha \in]0,1[$ tel que $g(\alpha) = 0$ et qu'en plus $0 < \beta < \alpha < 1$.

4. Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet exactement deux solutions sur l'intervalle $[0,1[$. Expliciter le tableau de signe de $f(x) - x$ sur cet intervalle.

Date: 6 Novembre 2023.
http://louismerlin.fr.

Partie C : étude d'une suite récurrente.

On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} w_0 \in \left]0,1\right[, \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$$

1. Que se passe-t-il si on prend $w_0 = 0$ ou $w_0 = \alpha$.

2. Dans cette question, on suppose que $w_0 \in \left]\alpha, 1\right[$ et on cherche à montrer que $(w_n)_n$ **n'est pas** bien définie.

- **a.** L'intervalle $\left]\alpha, 1\right[$ est-il stable par f ?
  On raisonne dorénavant par l'absurde et on suppose que w_n est défini pour tout n.
- **b.** Montrer que la suite $(w_n)_n$ est croissante.
- **c.** Montrer alors que $(w_n)_n$ diverge vers $+\infty$.
- **d.** Conclure.
- **e.** Écrire un programme Python qui calcule et affiche le premier rang n tel que w_n est bien défini mais w_{n+1} n'existe pas On suppose que la valeur w0 de w_0 est donnée.

3. Dans cette question, on suppose que $w_0 \in \left]0, \alpha\right[$.

- **a.** Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
- **b.** Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

Partie D : étude d'une suite implicite.

On note, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (E_n) l'équation $x^n + x - 1 = 0$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Étudier les variations sur $\mathbb{R}_+$ de la fonction $h_n : x \mapsto x^n + x - 1$.
En déduire que l'équation (E_n) admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+$ que l'on note u_n.

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n appartient à l'intervalle $\left]0,1\right[$.

3. Déterminer u_1 et u_2.

4. **a.** Recopier et compléter la fonction Python suivante afin que, prenant en argument un entier n de $\mathbb{N}^*$, elle renvoie une valeur approchée de u_n à 10^{-3} près, obtenue par dichotomie.

```
def valeur_approchee(n) :
  a=0
  b=1
  while ........
    c=(a+b)/2
    if c**n + c - 1 > 0 :
      .........
    else :
      .........
  return ..........
```

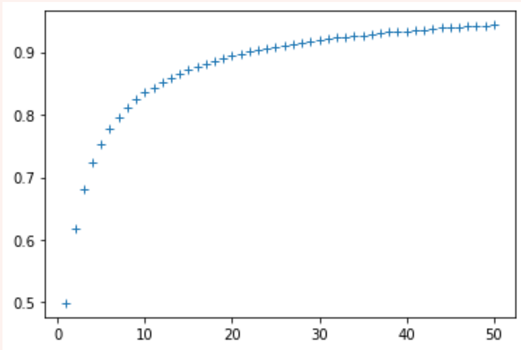
- **b.** On ajoute les commandes suivantes dont l'exécution permet d'afficher la figure ci-dessous. Expliquer à quoi elles correspondent. Quelles conjectures peut-on faire sur le suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ concernant sa monotonie et son éventuelle limite.

```
import matplolib.pyplot as plt

X = list(range(1,51))
L = []
for k in range(1,51) :
  L.append(valeur_approchee(k))

plt.plot(X,L,'+')
plt.show
```

Affichage Python



5. Déterminer, pour $x \in]0,1[$, le signe de $h_{n+1}(x) - h_n(x)$. En déduire le sens de variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

6. **a.** Justifier la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite $\ell \in [0,1]$.

b. On suppose que $\ell \in [0,1[$. Vérifier que $n\ln(u_n) \to -\infty$ et en déduire la limite de u_n^n. Aboutir à une contradiction puis conclure quant à la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $f(u_n) = n$. Retrouver alors les résultats précédents concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2.- *Séries.*
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

et on appelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{f(u_n)} \end{cases}$$

1. **a.** Étudier la fonction f et dresser son tableau de variations.

b. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive et strictement décroissante.

c. En déduire que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1$.

2. **a.** Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement négative.

b. Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente de limite nulle.

c. Simplifier au maximum l'écriture $\sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+v_k)$.

d. En déduire la nature de la série $\sum v_n$.

Dans la suite, on admettra que, pour tout $x \in [0,1]$,

$$\frac{x^2}{4} \leqslant 1 - \frac{2}{e^x + e^{-x}} \leqslant x^2.$$

3. En déduire la nature de la série $\sum u_n^2$.

4. On considère maintenant une série quelconque de terme général w_n : On suppose que $w_n \geqslant 0$ et que $\sum w_n$ converge. Montrer que $\sum w_n^2$ converge aussi.

5. En déduire la nature de la série de terme général u_n.

Exercice 3.- *Espaces vectoriels.*
Le but de cet exercice est la résolution de l'équation matricielle $AM = MB$, d'inconnue M dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels.

On note (U_1, U_2, U_3, U_4) la base canonique de E.

Si A et B sont deux matrices de E, l'ensemble des matrices M vérifiant $AM = MB$ est noté $V_{A,B}$.

1. Soit A et B deux matrices de E. Dans toute la suite, on considère l'application $\varphi_{A,B}$ définie comme suit :
$$\varphi_{A,B} : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \longmapsto & AM - MB \end{array}.$$

a. Montrer que $\varphi_{A,B}$ est un endomorphisme de E et en déduire que $V_{A,B}$ est un sous-espace vectoriel de E.

b. Dans le cas particulier où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, construire la matrice carrée d'ordre 4 qui représente $\varphi_{A,B}$ dans la base (U_1, U_2, U_3, U_4).
Montrer que cette matrice est inversible et en déduire l'ensemble $V_{A,B}$.

2. Dans cette question r et s désignent deux réels distincts et différents de 1, et on pose
$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

a. Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ une matrice quelconque de E. Démontrer que
$$M \in V_{D,\Delta} \iff y = z = t = 0.$$

b. En déduire une base de $V_{D,\Delta}$.

3. Soit a, b, c, d des réels non nuls vérifiant $a - b \neq c - d$, $a - b \neq 1$, $c - d \neq 1$ et A et B les matrices définies par
$$A = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ b & 1-b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} c & 1-c \\ d & 1-d \end{pmatrix}.$$

On admet [1] qu'il existe

- une matrice P de E inversible telle que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$.
- une matrice Q de E inversible telle que $B = PQP^{-1}$ où $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c-d \end{pmatrix}$.

Pour toute matrice M de E, démontrer que
$$M \in V_{A,B} \iff P^{-1}MQ \in V_{D,\Delta}.$$

En déduire une base de $V_{A,B}$.

4. Dans cette question, r, s et u et v désignent quatre réels vérifiant $r \neq s$, $r \neq v$, $u \neq s$, $u \neq v$ et on pose
$$D = \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \Delta = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Par une méthode analogue à la question **2**, déterminer $V_{D,\Delta}$.

1. Voir le chapitre 7 du cours