DEVOIR MAISON II

ECG2 MATHS APPLIQUÉES

1. Ce devoir n'est pas noté. Vous pouvez utiliser toutes les ressources qui vous semblent pertinentes mais il est vivement conseillé de vous mettre dans des conditions d'examen. Si vous avez besoin de vous référer au cours, assurez-vous de mémoriser les résultats ou méthodes qui vous ont servi.
2. Vous pouvez travailler à plusieurs mais de préférence en petits groupes de 3 ou 4 étudiants. Faites alors attention à laisser chacun s'exprimer et participer à la résolution de l'exercice. Ne passez pas à la question suivante avant de vous être assurés que chaque membre du groupe a compris la solution.
3. Dans ce cas, indiquez les autres étudiants avec qui vous avez travaillé.
4. Même dans le cas d'un travail en commun, chacun doit **rédiger sa propre solution**.
5. L'un des objectifs de ce devoir est de perfectionner sa qualité de rédaction. Vous prendrez donc soin d'attacher une importance particulière à votre manière de rédiger (précision du raisonnement, résultats du cours cités avec rigueur, faire attention aux connexions logiques,...).

Date: 16 Octobre 2023.
http://louismerlin.fr.

Un exercice d'analyse

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par
$$f(x) = \frac{x}{(x+1)^2};$$
- La fonction F définie sur $]-1, +\infty[$ par
$$F(x) = \int_0^x f(t)dt;$$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} = f(u_n)$.

Partie I : étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. Déterminer les variations de f, présentées sous forme d'un tableau.

Partie II : Étude de la fonction F.

1. Justifier que F est bien définie sur $]-1, +\infty[$ et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

2. À l'aide du changement de variables $u = t + 1$, montrer que pour tout $x > -1$,
$$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}.$$

3. À l'aide d'équivalents, déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.

4. **a.** Étudier la concavité de F. On montrera notamment que F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

b. Montrer que pour tout $x > -1$ et non nul, on a $F(x) > 0$.

5. Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $\frac{1}{1+x}$. En déduire le développement limité de F à l'ordre 2 en 0.

6. Préciser l'équation de la tangente à la courbe F en 0, et leurs positions relatives.

7. Représenter l'allure de la courbe représentative de F ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0.

Partie III : Étude la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

3. En déduire la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers une limite à préciser.

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.

a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$2 \leqslant v_n \leqslant 2 + \frac{1}{n}.$$

b. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$2(n+1) \leqslant \frac{1}{u_n} \leqslant 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

5. **a.** Montrer que pour tout entier $k \geqslant 2$, $\frac{1}{k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t}$.

b. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \ln n.$$

6. Montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$.

7. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Un exercice de probas discrètes

Soit a un entier strictement positif. On dispose d'un jeu usuel de $2n$ cartes ($n = 16$ ou 26) qui contient donc deux rois rouges (carreau et coeur), et on envisage deux jeux d'argent régis par les protocoles suivants.

Partie 1 - Premier protocole. Les cartes du jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire. Le joueur découvre les cartes, de gauche à droite jusqu'à obtenir le premier roi rouge. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur du rang d'apparition du premier roi rouge.

1. (Simulation avec Python).

a. Compléter la fonction suivante afin qu'elle simule la variable X.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_X(n):
  y=1
  T = 2* n # nombre de cartes a retourner
  while ........... :
     .........
     .........
  return .......
```

b. Écrire une fonction `freq(L)` qui, prenant en argument une liste de valeurs `L` (dont les composantes sont des entiers entre 1 et ℓ), renvoie une liste dont les composantes sont les fréquences d'apparitions des valeurs de la liste `L`.

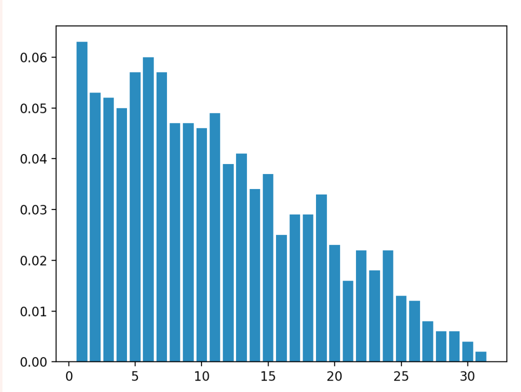
c. On prend $n = 16$. On ajoute les commandes suivantes qui permettent l'affichage ci-après :

```
import matplotlib.pyplot as plt

n=16
sample = [simul_X(n) for k in range(1000)]
valeurs = [k for k in range(1, 2*n)]
frequences = freq(sample)

plt.bar(valeurs, frequences)
plt.show()
```

Affichage Python



(i) Quelles instructions permettent d'obtenir une *estimation* de $E(X)$?

(ii) Donner une estimation graphique de $P(X=1)$. Que vaut vraiment $P(X=1)$?. Donner des estimations de $P(X=2), P(X=3)$.

2. Que vaut $X(\Omega)$?

3. Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X=k)=\frac{2n-k}{n\,(2n-1)}.$$

4. Montrer que $E(X)=\dfrac{2n+1}{3}$.

Le joueur perd un euro chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros lorsqu'il obtient le premier roi rouge.
On note G_1 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k^{ième}$ carte découverte, G_1 est égale à $a-k$.

5. Exprimer G_1 en fonction de a et X. En déduire l'expression de $E(G_1)$ en fonction de a et n.

6. Avec quelles instructions supplémentaires peut-on simuler G_1 ?

Partie 2 - Deuxième protocole. Les $2n$ cartes du même jeu sont alignés sur une table de façon aléatoire, mais cette fois-ci, le joueur peut découvrir au maximum n cartes.

Le joueur perd un euro à chaque fois qu'il découvre une carte et gagne a euros losqu'il obtient le premier roi rouge.

On note G_2 la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur. Ainsi, si le premier roi rouge apparaît à la $k$ième carte découverte ($k \leqslant n$), G_2 est égale à $a-k$, et si le joueur n'obtient pas de roi rouge à l'issue des n premiers tirages, alors G_2 est égale à $-n$.

7. Écrire, en reprenant une partie du programme précédent, une fonction `simul_G_2(a,n)`, qui simule la variable G_2.

8. Pour tout entier $k \in [\![1;n]\!]$, déterminer $P\left(G_2=a-k\right)$.

9. Vérifier que

$$P(G_2=-n)=\frac{n-1}{2\,(2n-1)}.$$

10. Obtenir alors que

$$E\left(G_2\right)=\frac{3\,(3n-1)\,a-\left(7n^2-1\right)}{6\,(2n-1)}.$$

11. On suppose le jeu constitué de 32 cartes ($n = 16$). Déterminer (éventuellement avec l'aide de Python, selon les valeurs de a, le protocole le plus favorable au joueur. Justifier la réponse.