CHAPITRE IX

COUPLES ET SUITES DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Couples de variables aléatoires discrètes

1.1. Loi conjointe.

Définition : Loi conjointe

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On appelle **loi conjointe** la loi de probabilité du couple $(X;Y)$. C'est la donnée :

- des supports $X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots\}$ et $Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_j, \dots\}$ (ensembles finis ou infinis) ;
- des probabilités $p_{ij} = P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$.

La loi d'un couple de variable est donc indexée par des couples d'indices. Remarquons tout de suite qu'il n'y a aucune raison que les deux variables X et Y soient indépendantes et donc

$$p_{ij} = P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) \neq P(X = i) \cdot P(Y = j)$$

en général.

Remarque 1.1.1. Si X et Y sont des variables aléatoires finies, de supports respectifs

$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \dots, y_m\},$$

on peut présenter les résultats sous forme d'un tableau :

(X,Y)	y_1	y_2	$\cdots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}

Remarque 1.1.2. La loi conjointe du couple (X,Y) est une loi de probabilité, on a donc $p_{ij} \geqslant 0$ pour tous i et j tels que $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$, et :

$$\sum_{x_i \in X(\Omega)} \left(\sum_{y_j \in Y(\Omega)} p_{ij} \right) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} \left(\sum_{x_i \in X(\Omega)} p_{ij} \right) = 1$$

ces sommes étant des sommes finies ou des sommes de séries (nécessairement convergentes donc).

Méthode : Obtention de la loi conjointe

Pour donner la loi conjointe, il faut donc calculer les probabilités $P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$ pour tout $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$. Il y a plusieurs méthodes :

- Si on est dans une situation d'équiprobabilité et si X et Y sont finies, on peut procéder par dénombrement, en comptant le nombre d'issues réalisées par l'événement $[X = x_i] \cap [Y = y_j]$ puis en divisant par le nombre total d'issues $\mathrm{Card}(\Omega)$.
- Sinon, on peut utiliser les probabilités conditionnelles :
$$P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = P(X = x_i) P_{[X = x_i]}(Y = y_j)$$
si on connaît la loi de X, ou :
$$P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = P(Y = y_j) P_{[Y = y_j]}(X = x_i)$$
si on connaît la loi de Y.

Exemple 1.1.3. On lance deux dés équilibrés à 4 faces. On note X le maximum des deux résultats et Y le minimum. Donnons la loi du couple (X, Y).

On a déjà $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4\}$. Puis :

- $P\big([X = 1] \cap [Y = 2]\big) = 0$ car X est le maximum et Y le minimum des deux dés, donc $X \geqslant Y$. De manière générale, $P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = 0$ si $1 \leqslant i < j \leqslant 4$.
- $P\big([X = 1] \cap [Y = 1]\big) = \frac{1}{16}$ car seul le couple de résultats $(1, 1)$ répond à l'événement, sur 16 couples possibles. De manière générale, $P\big([X = i] \cap [Y = i]\big) = \frac{1}{16}$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- $P\big([X = 2] \cap [Y = 1]\big) = \frac{2}{16}$ car les deux couples de résultats $(1, 2)$ et $(2, 1)$ répondent à l'événement, sur 16 couples possibles. De manière générale, $P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{2}{16}$ si $1 \leqslant j < i \leqslant 4$.

On obtient donc le tableau ci-contre pour la loi conjointe de X et Y :

(X, Y)	1	2	3	4
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0
3	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0
4	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$

Simulation informatique :

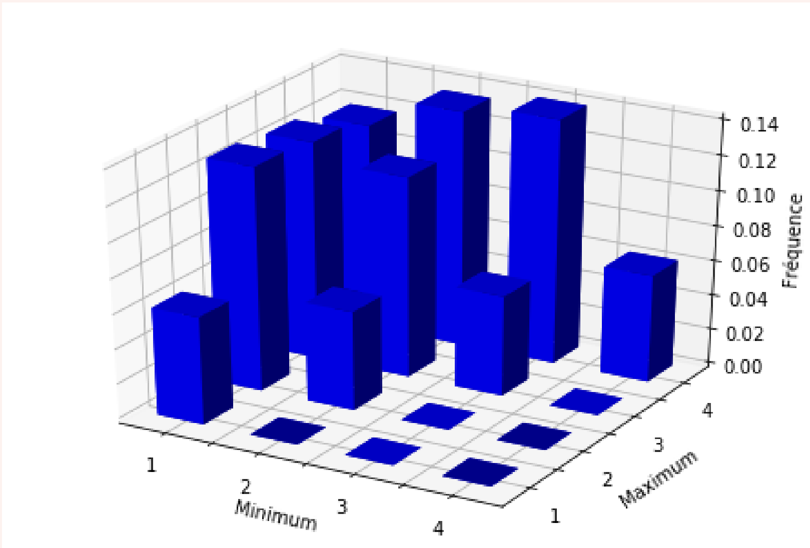
```
import numpy.random as rd
import numpy as np


def lancer():
    z = rd.randint(1, 5, 2) # contient le lancer de deux des
    x = max(z)
    y = min(z)
    return [x, y]

# estimation de la loi du couple (x,y)

N=1000


Loi = np.zeros((4,4))
for i in range(N) :
    [x, y] = lancer()
    Loi[x-1, y-1] = Loi[x-1, y-1] + 1 # attention aux conventions d'indices

Loi = Loi/N

print(Loi)
```

Résultat de deux exécutions

```
[[0.056 0.    0.    0.   ]
 [0.14  0.051 0.    0.   ]
 [0.129 0.129 0.06  0.   ]
 [0.116 0.135 0.124 0.06 ]]


[[0.057 0.    0.    0.   ]
 [0.128 0.062 0.    0.   ]
 [0.133 0.133 0.085 0.   ]
 [0.118 0.119 0.099 0.066]]
```

On peut représenter ensuite les fréquences d'apparition des réalisations de la loi du couple en un diagramme 3D (le programme qui permet de construire ce genre de diagramme n'est pas au programme, il est disponible en annexe de ce cours sur ma page Web) :

Histogramme empirique



Exemple 1.1.4. On dispose d'une urne avec 2 boules blanches, 2 boules noires et 3 boules rouges. On tire simultanément 3 boules de cette urne. On note X le nombre de rouges tirées et Y le nombre de noires. Donnons la loi du couple (X, Y).

On a déjà $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ et $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. Puis, pour tous $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$:

$$P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{\binom{3}{i}\binom{2}{j}\binom{2}{3-i-j}}{\binom{7}{3}}.$$

En effet, les tirages sont simultanés et il y a $\binom{7}{3} = 35$ tirages possibles. On prélève i boules parmi les 3 rouges, j boules parmi les 2 noires, et le restant, soit $3 - i - j$ boules parmi les 2 blanches avec pour convention $\binom{p}{k} = 0$ si $k < 0$ ou $k > p$.

On obtient donc le tableau suivant pour la loi conjointe de X et Y :

(X, Y)	0	1	2
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0
3	$\frac{1}{35}$	0	0

Exemple 1.1.5. On dispose d'un sac contenant 6 jetons dont 2 sont rouges dans lequel on prélève simultanément 3 jetons. Si on a obtenu k jetons rouges dans le tirage, on lance k fois une pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut $\frac{3}{5}$.

On note X le nombre de boules rouges contenues dans le tirage et Y le nombre de piles obtenu lors des lancers.

On a déjà : $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$. La loi de probabilité de X peut être calculée directement :

$$\forall i \in \{0, 1, 2\}, \quad P(X = i) = \frac{\binom{2}{i}\binom{4}{3-i}}{\binom{6}{3}}$$

i	0	1	2
$P(X = i)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

Calculons maintenant les probabilités du couple (X, Y) :

- On a $X \geqslant Y$ car on lance X fois la pièce donc le nombre Y de piles est inférieur ou égal au nombre X de lancers. Donc : $P\big((X = i) \cap (Y = j)\big) = 0$ si $0 \leqslant i < j \leqslant 2$.
- Si $0 \leqslant j \leqslant i \leqslant 2$, on peut utiliser la loi de X avec les probabilités conditionnelles :

$$P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = P(X = i)P_{[X=i]}(Y = j) = P(X = i)\binom{i}{j}\left(\frac{3}{5}\right)^j\left(\frac{2}{5}\right)^{i-j}$$

On obtient donc le tableau suivant pour la loi conjointe de X et Y :

$(X;Y)$	0	1	2
0	$\frac{1}{5}$	0	0
1	$\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25}$	$\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$	0
2	$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{125}$	$\frac{1}{5} \cdot 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{125}$	$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{125}$

Exemple 1.1.6. On lance une pièce une infinité de fois. On note $p \in]0; 1[$ (et $q = 1 - p$) la probabilité d'obtenir pile. Soit X le rang du premier pile et Y le rang du deuxième pile. Donner la loi conjointe de X et Y puis vérifier qu'on a bien une loi de probabilité.

On a $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

Soit $i, j \in \mathbb{N}$, $i \geqslant 1$ et $j \geqslant 2$. On a nécessairement $X < Y$, donc :

$$\text{si } i \geqslant j,\ p_{i,j} = P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = 0.$$

Et :

$$\text{si } i < j,\ p_{i,j} = P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = q^{i-1}pq^{j-i-1}p = p^2q^{j-2}.$$

En effet, l'événement $[X = i] \cap [Y = j]$ nécessite j lancers, où l'on a obtenu Pile exactement au i^{e} et au j^{e} lancers, et Face le reste du temps. Cet événement est donc réalisé par la suite de résultats des lancers indépendants :

$$\underbrace{F_1 \cap \ldots \cap F_{i-1}}_{i-1 \text{ fois}} \cap P_i \cap \underbrace{F_{i+1} \cap \ldots \cap F_{j-1}}_{j-i-1 \text{ fois}} \cap P_j.$$

Montrons que $\sum\limits_{\substack{i \geqslant 1\\ j \geqslant 2}} p_{i,j} = 1$. Or :

$$\sum_{\substack{i \geqslant 1\\ j \geqslant 2}} p_{i,j} = \sum_{j=2}^{+\infty}\sum_{i=1}^{j-1} p^2q^{j-2} = p^2\sum_{j=2}^{+\infty}(j-1)q^{j-2} = p^2\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = p^2\frac{1}{(1-q)^2} = 1.$$

(On a reconnu une série géométrique dérivée première de raison $q \in]0; 1[$ donc convergente).

1.2. **Lois marginales.** Si l'on connaît la loi du couple (X, Y), on peut en déduire les lois de X et Y, appelées **lois marginales**, par la formule des probabilités totales. C'est une situation très classique : parfois il apparaît plus naturellement la loi du couple et il faut être capable d'en déduire les lois marginales.

Théorème : Lois marginales

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires réelles discrètes. On a alors :

- Pour tout $x_i \in X(\Omega)$,
$$P(X = x_i) = \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big).$$
La loi de X est appelée **première loi marginale** du couple (X, Y).
- Pour tout $y_j \in Y(\Omega)$,
$$P(Y = y_j) = \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big).$$
La loi de Y est appelée **seconde loi marginale** du couple (X, Y).

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.2.1. Dans le cas fini, $P(Y = y_1)$ est la somme de la première colonne du tableau donnant la loi conjointe. De même pour $P(Y = y_j)$ avec $j \geqslant 1$, et pour $P(X = x_i)$ (avec $i \geqslant 1$) qui est la somme de la i-ème ligne du tableau donnant la loi conjointe.

On peut compléter le tableau de la façon suivante :

(X, Y)	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	Somme
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$P(X = x_1)$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$P(X = x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$P(X = x_n)$
Somme	$P(Y = y_1)$	$P(Y = y_2)$	$\cdots$	$P(Y = y_m)$	1

Exemple 1.2.2. Dans l'exemple 1.1.3, on obtient les lois marginales :

(X, Y)	1	2	3	4	Somme
1	$\frac{1}{16}$	0	0	0	$\frac{1}{16}$
2	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	0	$\frac{3}{16}$
3	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	0	$\frac{5}{16}$
4	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{16}$
Somme	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

i	1	2	3	4
$P(X = i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

j	1	2	3	4
$P(Y = j)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

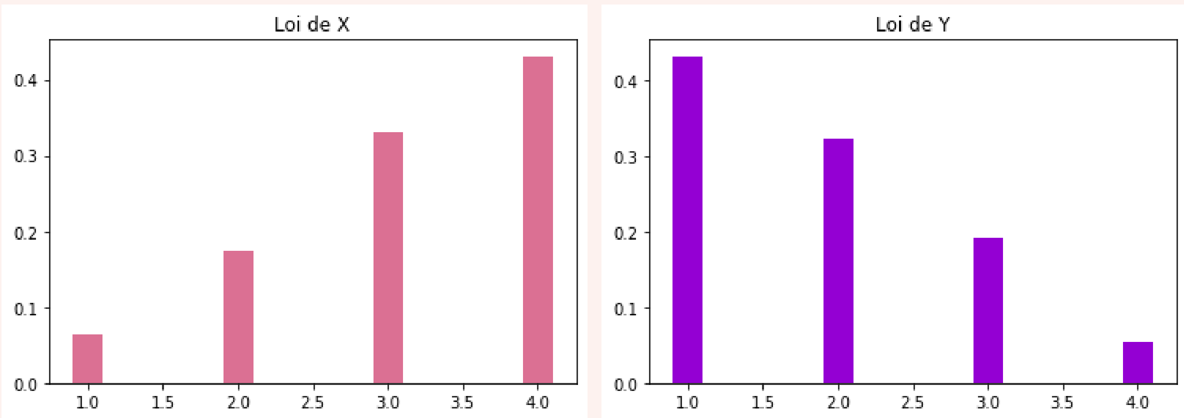
Simulation informatique : à partir de la matrice contenant l'estimation des probabilités de la loi du couple, on fait les sommes en ligne ou en colonne pour obtenir les estimations des probabilités pour X et Y :

On reprend le début du programme qui nous a servi à simuler la loi du couple (X, Y).

```
(...)

# estimation des lois marginales

import mathplotlib.pyplot as plt

LoiX=[0]*4
LoiY=[0]*4
for i in range (4) :
    LoiX[i] = 0
    LoiY[i] = 0
    for j in range(4):
        LoiX[i]=LoiX[i] + Loi[i,j] # somme de la ligne i
        LoiY[i]=LoiY[i] + Loi[j,i] # somme de la colonne i

print(LoiX,LoiY)


fig = plt.figure()
x = [1,2,3,4]
height = LoiY
width=0.2
plt.bar(x,height,width,color='darkviolet')

plt.show()
```

```
    0.056     0.193     0.321     0.43

    0.462     0.287     0.182     0.069
```

Lois marginales



Exemple 1.2.3. Dans l'exemple 1.1.4, on obtient les lois marginales :

(X,Y)	0	1	2	Somme
0	0	$\frac{2}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{4}{35}$
1	$\frac{3}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{3}{35}$	$\frac{18}{35}$
2	$\frac{6}{35}$	$\frac{6}{35}$	0	$\frac{12}{35}$
3	$\frac{1}{35}$	0	0	$\frac{1}{35}$
Somme	$\frac{10}{35}$	$\frac{20}{35}$	$\frac{5}{35}$	1

i	0	1	2	3
$P(X=i)$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

j	0	1	2
$P(Y=j)$	$\frac{10}{35}=\frac{2}{7}$	$\frac{20}{35}=\frac{4}{7}$	$\frac{5}{35}=\frac{1}{7}$

Exemple 1.2.4. Dans l'exemple 1.1.5, on obtient la loi marginale de Y :

j	0	1	2
$P(Y=j)$	$\frac{1}{5}+\frac{6}{25}+\frac{4}{125}=\frac{59}{125}$	$0+\frac{9}{25}+\frac{12}{125}=\frac{57}{125}$	$0+0+\frac{9}{125}=\frac{9}{125}$

Exemple 1.2.5. Dans l'exemple 1.1.6, les lois marginales sont données par la formule des probabilités totales. On obtient :

- Pour $i \geqslant 1$:

$$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{j=2}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[Y=j]\big) \\ &= \sum_{j=i+1}^{+\infty} p^2 q^{j-2} \\ &\underbrace{=}_{k=j-i-1} p^2 \sum_{k=0}^{+\infty} q^{k+i-1} \\ &= p^2 q^{i-1} \sum_{k=0}^{+\infty} q^k \\ &= \frac{p^2 q^{i-1}}{1-q} = pq^{i-1}. \end{aligned}$$

  Ce n'est pas une surprise, car X suit la loi géométrique de paramètre p (rang du premier succès dans une répétition d'une infinité d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, et dont le succès "obtenir Pile" a pour probabilité p.)

- Pour $j \geqslant 2$:

$$P(Y=j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P\big([X=i]\cap[Y=j]\big) = \sum_{i=1}^{j-1} p^2 q^{j-2} = (j-1)p^2 q^{j-2}.$$

▶ **Pour s'entrainer : exo 1.**

1.3. **Lois conditionnelles.**

Définition : Lois conditionnelles

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

- Soit $y_j \in Y(\Omega)$ fixé. La **loi conditionnelle** de X sachant $[Y=y_j]$ est définie par :

$$P_{[Y=y_j]}(X=x_i) = \frac{P\big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)}{P(Y=y_j)}.$$

- Soit $x_i \in X(\Omega)$ fixé. La **loi conditionnelle** de Y sachant $[X=x_i]$ est définie par :

$$P_{[X=x_i]}(Y=y_j) = \frac{P\big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)}{P(X=x_i)}.$$

On vérifie que les lois conditionnelles sont bien des lois de probabilités (cela tient au fait que les probabilités conditionnelles sont bien des probabilités).

Dans les exercices on pourra utiliser cette relation pour trouver la loi conjointe si on a un moyen simple de connaître la loi conditionnelle.

Exemple 1.3.1. Dans l'exemple 1.1.4, la loi conditionnelle de X sachant $[Y=1]$ est donnée par le tableau :

i	0	1	2	3
$P_{[Y=1]}(X=i)$	$\frac{\frac{2}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{1}{10}$	$\frac{\frac{12}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{3}{5}$	$\frac{\frac{6}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{3}{10}$	0

Exemple 1.3.2. Dans l'exemple 1.1.5, la loi conditionnelle de Y sachant $[X=i]$ est une binomiale de paramètres i et $\frac{3}{5}$. En effet, si $[X=i]$, alors on lance i fois la même pièce de monnaie dont la probabilité de tomber sur pile vaut $\frac{3}{5}$, et Y désigne le nombre de piles obtenus.

En revanche, la loi de Y n'est pas binomiale.

Exercice 1.3.3. À un péage, on a en moyenne 20 voitures par heure, et 15 guichets. Le nombre N de voitures passant pendant une heure suit une loi de Poisson. On suppose que les voitures choisissent au hasard un guichet, et ce indépendamment les unes des autres. On note X le nombre de voitures se présentant au péage n°1.

1. Donner le paramètre de la loi de Poisson.
2. Quelle est la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$?
3. Déterminer la loi conjointe du couple (N, X).
4. En déduire la loi marginale de X.

▶ **Pour s'entrainer : exo 3.**

1.4. Théorème du transfert.

Théorème : Théorème du transfert

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes et g une fonction numérique de deux variables définie sur $X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Alors, sous réserve de convergence absolue (dans le cas infini), la variable aléatoire $Z = g(X, Y)$ admet une espérance qui vaut :

$$E(Z) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ y_j \in Y(\Omega)}} g(x_i, y_j) P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big).$$

En particulier (et sous réserve de convergence absolue), on a :

$$E(XY) = \sum_{\substack{x_i \in X(\Omega) \\ y_j \in Y(\Omega)}} x_i y_j P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big).$$

Exercice 1.4.1. Dans l'exemple 1.1.4, calculer $E(X^2 Y^3)$.

1.5. Covariance de deux variables aléatoires.

Proposition : Existence de $E(XY)$ et de $E\big((X+Y)^2\big)$

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2. Alors :

1. la variable aléatoire produit XY admet une espérance,
2. la variable aléatoire somme $X + Y$ admet un moment d'ordre 2.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.5.1. L'espérance $E(XY)$ peut alors être calculée grâce au théorème du transfert.

Définition : Covariance

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant une espérance. La **covariance** de X et Y est égale, sous réserve d'existence, à l'espérance de la variable aléatoire $\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)$:

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E\Big(\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\Big).$$

Remarque 1.5.2 (Sens de la covariance). Si X et Y ont tendance à être en même temps au dessus de leur moyenne, (ou en dessous), le nombre $\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)$ est positif, et cela donne une covariance positive. En revanche si $\big(X - E(X)\big)$ et $\big(Y - E(Y)\big)$ sont souvent de signes opposés, cela donnera plutôt une covariance négative. Une covariance positive signifie que les variables ont tendance à évoluer "dans le même sens", une covariance négative, qu'elles ont tendance à varier en sens opposés.

Théorème : Formule de Kœnig-Huygens

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Démonstration. À compléter. □

Exercice 1.5.3. On reprend la situation de l'exemple 1.1.3 : on lance deux dés équilibrés à 4 faces, X est le maximum des deux résultats et Y le minimum.

Estimation de la covariance de X et Y grâce à la simulation :

```python
(...)

T=np.zeros((4,4))
for i in range (4):
    for j in range (4):
        T[i,j]=i*j

EspXY=np.sum(Loi*T) # * est le produit terme a terme.
EspX=np.sum(np.array(LoiX)*np.array([1,2,3,4]))
EspY=np.sum(np.array(LoiY)*np.array([1,2,3,4]))

Cov = EspXY-EspY*EspX

print(Cov)
```

Montrer que $\mathrm{Cov}(X, Y) = -\frac{25}{64} \quad \left(\frac{25}{64} \approx -0,39\right)$.

Exercice 1.5.4. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ dans l'exemple 1.1.4.

Exercice 1.5.5. Calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$ dans l'exemple 1.1.6.

Proposition : Propriétés de la covariance

Soit X, Y et Z des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ admettant un moment d'ordre 2 et λ un nombre réel. On a :

1. **Si Y suit la loi certaine :** $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$.
2. **Si X et Y sont égales :** $\mathrm{Cov}(X, X) = V(X)$.
3. **Symétrie de la covariance :** $\mathrm{Cov}(Y, X) = \mathrm{Cov}(X, Y)$,
4. **Bilinéarité de la covariance :**

   $\mathrm{Cov}(\lambda X, Y) = \lambda \mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Cov}(X + Z, Y) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(Z, Y)$,
   (linéarité à gauche)

   $\mathrm{Cov}(X, \lambda Y) = \lambda \mathrm{Cov}(X, Y)$ et $\mathrm{Cov}(X, Y + Z) = \mathrm{Cov}(X, Y) + \mathrm{Cov}(X, Z)$,
   (linéarité à droite).

Démonstration. À compléter. □

Exercice 1.5.6. Exprimer en fonction de $\mathrm{Cov}(X,Y)$, $V(X)$ et $V(Y)$ le nombre $\mathrm{Cov}(2X+3Y, Y-X)$.

Proposition : Variance de la somme de deux variables aléatoires discrètes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2. Alors la variable aléatoire $X+Y$ admet une variance, qui vaut :

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

Démonstration. X et Y admettent un moment d'ordre 2, donc $X+Y$ également d'après la proposition 1.5. Il vient ensuite, en utilisant la linéarité de l'espérance :

$$V(X+Y) = E\big((X+Y)^2\big) - \big(E(X+Y)\big)^2 = E\big(X^2+Y^2+2XY\big) - \big(E(X)+E(Y)\big)^2$$
$$= E\big(X^2\big) + E\big(Y^2\big) + 2E(XY) - \big(E(X)\big)^2 - \big(E(Y)\big)^2 - 2E(X)E(Y) = V(X) + V(Y) + 2\mathrm{Cov}(X,Y).$$

□

Corollaire : Covariance de X, Y en fonction des variances de X, Y et $X \pm Y$

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et admettant un moment d'ordre 2. Alors :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\big(V(X+Y) - V(X) - V(Y)\big)$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \frac{1}{2}\big(V(X) + V(Y) - V(X-Y)\big)$$

Démonstration. À compléter. □

▶ **Pour s'entrainer : exo 5.**

1.6. Coefficient de corrélation linéaire.

Définition : Coefficient de corrélation linéaire

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et admettant une **variance non nulle**. Le nombre réel :

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$$

est appelé **coefficient de corrélation linéaire** de X et Y.

Exemple 1.6.1. Dans l'exemple 1.1.3 (on lance deux dés équilibrés à 4 faces, X est le maximum des deux résultats et Y le minimum), estimation du coefficient de corrélation linéaire :

```
(...)

m2X=sum(np.array(LoiX) * np.array([1:4])**2)
m2X=sum(np.array(LoiX) * np.array([1:4])**2)
varX=m2X-espX**2
varY=m2Y-espY**2
rho=cov/sqrt(varX*varY)

print('Le coefficient de correlation lineaire empirique est : ' rho)
```

Rappel des lois marginales :

i	1	2	3	4
$P(X=i)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{7}{16}$

j	1	2	3	4
$P(Y=j)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

Les calculs donnent :

$$E(X) = 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{5}{16} + 4 \times \frac{7}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$$

$$E(X^2) = 1^2 \times \frac{1}{16} + 2^2 \times \frac{3}{16} + 3^2 \times \frac{5}{16} + 4^2 \times \frac{7}{16} = \frac{170}{16} = \frac{85}{8}.$$

$$V(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2 = \frac{55}{8} - \left(\frac{25}{8}\right)^2 = \frac{55}{64}.$$

$$E(Y) = 1 \times \frac{7}{16} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{3}{16} + 4 \times \frac{1}{16} = \frac{30}{16} = \frac{15}{8}.$$

$$E(Y^2) = 1^2 \times \frac{7}{16} + 2^2 \times \frac{5}{16} + 3^2 \times \frac{3}{16} + 4^2 \times \frac{1}{16} = \frac{70}{16} = \frac{35}{8}.$$

$$V(Y) = E(Y^2) - \big(E(Y)\big)^2 = \frac{35}{8} - \frac{15}{8}^2 = \frac{55}{64}$$

$$\rho = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{-\frac{25}{64}}{\frac{55}{64}} = -\frac{25}{55} = -\frac{5}{11} \approx -0.45$$

Exercice 1.6.2. Calculer $\rho(X,Y)$ dans l'exemple 1.1.4.

Théorème : Bornes sur le coefficient de corrélation linéaire.

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et admettant une **variance non nulle**. Alors :

$$-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1,$$

avec égalité en -1 ou en 1 si, et seulement s'il existe deux réels a et b tels que $Y = aX + b$, presque sûrement.

Démonstration. À compléter. □

Exercice 1.6.3. Que valent $\rho(X,X)$, $\rho(X,2X)$ et $\rho(X,-X)$?

Définition : Variables aléatoires non correlées

On dit que deux variables aléatoires X et Y sont non corrélées lorsque $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (ou $\rho(X,Y) = 0$).

▶ **Pour s'entrainer : exo 4, 6 et 7.**

2. Indépendance des variables aléatoires discrètes

2.1. Indépendance de deux variables aléatoires discrètes.

Définition : Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On dit que X et Y sont **indépendantes** lorsque, pour tout $x_i \in X(\Omega)$ et $y_j \in Y(\Omega)$, on a :

$$P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big) = P(X = x_i) \times P(Y = y_j).$$

Remarque 2.1.1.
- Deux variables aléatoires X et Y sont donc indépendantes si les événements $[X = x_i]$ et $[Y = y_j]$ sont indépendants, pour toutes valeurs de x_i et y_j prises par X et Y respectivement.
- Si deux variables aléatoires sont issues d'expériences n'influant pas l'une sur l'autre, alors elles sont indépendantes.

Proposition : Variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

1. Si f et g sont deux fonctions définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont encore indépendantes.
2. $P\big([X \in A] \cap [Y \in B]\big) = P(X \in A)P(Y \in B)$ pour toute partie $A \subset X(\Omega)$ et toute partie $B \subset Y(\Omega)$.

Exemple 2.1.2. Si X et Y sont indépendantes, alors X^2 et Y , X^2 et Y^2, $\cdots$ sont aussi indépendantes.

Méthode : Loi conjointe de deux variables aléatoires discrètes indépendantes

Dans le cas où X et Y sont des variables aléatoires indépendantes, on peut obtenir la loi conjointe du couple (X, Y) à partir des deux lois de X et Y en multipliant les probabilités.

Réciproquement, on peut voir dans le tableau ou avec la loi conjointe et les lois de X et Y si les variables aléatoires sont indépendantes. Il suffit de vérifier la condition pour chaque x_i, y_j.

Exemple 2.1.3. Il y a indépendance si l'on répète la même expérience sans changer les conditions. Par exemple, pour le lancer d'un même dé équilibré deux fois de suite, si X est le numéro du premier lancer et Y le numéro du second, alors X et Y sont indépendantes. En effet :

$$P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = P(X = i)P(Y = j)$$

pour tout couple $(i, j) \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$.

Exemple 2.1.4. Dans l'exemple 1.1.4, X et Y ne sont pas indépendantes. En effet, d'après le tableau de la loi conjointe obtenu, on a :

$$P\big([X = 0] \cap [Y = 0]\big) = 0 \neq \frac{4}{35} \times \frac{10}{35} = P(X = 0)P(Y = 0).$$

Théorème : Covariance de deux variables aléatoires indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé. Si X et Y sont indépendantes, alors :

1. $E(XY) = E(X)E(Y)$,
2. $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$,
3. $\rho(X, Y) = 0$,
4. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.1.5. Attention : la réciproque est fausse. Si $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, X et Y **ne sont pas forcément indépendantes.** Par exemple, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\{-1, 0, 1\})$ et $Y = 1 - |X|$, alors X et Y ne sont pas indépendantes, car :

$$P\big([X = 1] \cap [Y = 1]\big) = P\big([X = 1] \cap [X = 0]\big) = 0,$$

et :

$$P(X=1)\times P(Y=1)=P(X=1)\times P(X=0)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}\neq 0.$$

Mais $XY=X\big(1-|X|\big)=0$ donc $E(XY)=0$, et $E(X)=0$ donc $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$.

On pourra en revanche utiliser la contraposée : si $\mathrm{Cov}(X,Y)\neq 0$, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Méthode : Comment montrer que X et Y sont ou ne sont pas indépendantes

Pour montrer que X et Y sont indépendantes :

- On peut le voir directement avec l'expérience aléatoire et la définition de X et Y ;
- On montre que **pour tout** $x_i\in X(\Omega)$ et **pour tout** $y_j\in Y(\Omega)$, les réels $P\big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)$ et $P(X=x_i)P(Y=y_j)$ sont égaux.

Pour montrer que X et Y ne sont pas indépendantes :

- On trouve **une** valeur $x_i\in X(\Omega)$ et **une** valeur $y_j\in Y(\Omega)$ telles que les réels $P\big([X=x_i]\cap[Y=y_j]\big)$ et $P(X=x_i)P(Y=y_j)$ ne sont pas égaux (penser aux zéros dans la loi conjointe) ;
- On montre que $E(XY)\neq E(X)E(Y)$;
- On montre que $\mathrm{Cov}(X,Y)\neq 0$;
- On montre que $V(X+Y)\neq V(X)+V(Y)$.

2.2. **Indépendance d'une famille ou d'une suite de variables aléatoires discrètes.**

Définition : Famille finie de variables aléatoires (mutuellement) indépendantes

On dit que les variables aléatoires discrètes $X_1,X_2,\dots,X_n$ définies sur le même espace probabilité $(\Omega,\mathcal{A},P)$ sont **(mutuellement) indépendantes** si, et seulement si, pour toute liste de valeurs $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ prises par $(X_1,X_2,\dots,X_n)$, on a :

$$P\big([X_1=x_1]\cap[X_2=x_2]\cap\dots\cap[X_n=x_n]\big)=P(X_1=x_1)P(X_2=x_2)\dots P(X_n=x_n).$$

Définition : Suite de variables aléatoires indépendantes

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$. On dit que les variables aléatoires X_n sont indépendantes si, et seulement si toute sous-famille finie est constituée de variables aléatoires indépendantes, au sens de la définition précédente.

Remarque 2.2.1. Si une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou une famille $(X_1,X_2,\dots,X_n)$ sont constituées de variables aléatoires discrètes indépendantes, alors, en particulier, X_i et X_j sont indépendantes pour tout $i\neq j$.

Attention, la réciproque est fausse ! Ce n'est pas parce que les variables sont deux à deux indépendantes qu'elles sont mutuellement indépendantes.

Proposition : Variance d'une somme de n variables aléatoires indépendantes

Soit $X_1,X_2,\dots,X_n$ des variables aléatoires discrètes **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé et admettant un moment d'ordre 2. On a alors :

$$V(X_1+X_2+\dots+X_n)=V(X_1)+V(X_2)+\dots+V(X_n).$$

Théorème : Lemme des coalitions

Soit

$$X_1,X_2,\dots X_p,X_{p+1},\dots,X_n$$

des variables aléatoires discrètes et **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Alors, pour toute fonction f et toute fonction g bien définies, les variables aléatoires $f(X_1, X_2, \ldots, X_p)$ et $g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ sont indépendantes.

Exemple 2.2.2. Soit X, Y, Z, T quatre variables aléatoires indépendantes. Alors XY et Z sont aussi indépendantes, Ze^Y et $X - T^2$ sont indépendantes, X, $Y - Z$ et T^3 sont indépendantes.

2.3. Calculs de probabilités à l'aide de la loi conjointe.

Méthode : Autres calculs : $P(X = Y)$, $P(X \leqslant Y)$...

Utiliser la formules des probabilités totales pour utiliser la loi conjointe et l'indépendance, le cas échéant. Par exemple :

$$\begin{aligned}
P(X=Y) &= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X=x_i] \cap [X=Y]\big) \quad \text{avec ensemble complet d'événements } \big([X=x_i]\big)_{x_i \in X(\Omega)} \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X=x_i] \cap [Y=x_i]\big) \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X=x_i) \times P(Y=x_i) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
P(X=Y) &= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([Y=y_j] \cap [X=Y]\big) \quad \text{avec ensemble complet d'événements } \big([Y=y_j]\big)_{y_j \in Y(\Omega)} \\
&= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([Y=y_j] \cap [X=y_j]\big) \\
&= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(Y=y_j) \times P(X=y_j) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
P(X \leqslant Y) &= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X=x_i] \cap [X \leqslant Y]\big) \quad \text{avec ensemble complet d'événements } \big([X=x_i]\big)_{x_i \in X(\Omega)} \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X=x_i] \cap [Y \geqslant x_i]\big) \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X=x_i) \times P(Y \geqslant x_i) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
P(X \leqslant Y) &= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([Y=y_j] \cap [X \leqslant Y]\big) \quad \text{avec ensemble complet d'événements } \big([Y=y_j]\big)_{y_j \in Y(\Omega)} \\
&= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([Y=y_j] \cap [X \leqslant y_j]\big) \\
&= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(Y=y_j) \times P(X \leqslant y_j) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}
\end{aligned}$$

Exercice 2.3.1. Soit X et Y deux variables indépendantes de loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$. Calculer $P(X = Y)$ et $P(X \leqslant Y)$.

▶ **Pour s'entrainer : exo 2.**

3. Opérations sur les variables aléatoires indépendantes

3.1. Somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Méthode : Loi de probabilité de la somme de deux variables aléatoires discrètes

Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, notons $S = X + Y$ eur somme, avec $S(\Omega) = \{s_k\}$. Alors :

$$\begin{aligned}
P(S = s_k) &= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X = x_i] \cap [S = s_k]\big) \quad \text{avec ensemble complet d'événements } \big([X = x_i]\big)_{x_i \in X(\Omega)} \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X = x_i] \cap [X + Y = s_k]\big) \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P\big([X = x_i] \cap [Y = s_k - x_i]\big) \\
&= \sum_{x_i \in X(\Omega)} P(X = x_i) \times P(Y = s_k - x_i) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}
\end{aligned}$$

La somme porte en réalité sur les termes $x_i \in X(\Omega)$ tels que $s_k - x_i \in Y(\Omega)$

$$\begin{aligned}
P(S = s_k) &= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([Y = y_j] \cap [S = s_k]\big) \quad \text{avec ensemble complet d'événements } \big([Y = y_j]\big)_{y_j \in Y(\Omega)} \\
&= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([Y = y_j] \cap [X + Y = s_k]\big) \\
&= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P\big([Y = y_j] \cap [X = s_k - y_j]\big) \\
&= \sum_{y_j \in Y(\Omega)} P(Y = y_j) \times P(X = s_k - y_j) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}
\end{aligned}$$

La somme porte en réalité sur les termes $y_j \in X(\Omega)$ tels que $s_k - y_j \in X(\Omega)$

Dans le cas où les variables sont à valeurs entières, on peut aussi dénombrer toutes les possibilités de valeurs pour X et Y pour avoir $X + Y = k$:

$$\begin{aligned}
P(S = k) = \sum_{i+j=k} P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) &= \sum_{i} P\big([X = i] \cap [Y = k - i]\big) \\
&= \sum_{i} P(X = i) \times P(Y = k - i) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes} \\
P(S = k) = \sum_{i+j=k} P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) &= \sum_{j} P\big([X = k - j] \cap [Y = j]\big) \\
&= \sum_{j} P(X = k - j) \times P(Y = j) \quad \text{si } X \text{ et } Y \text{ indépendantes}
\end{aligned}$$

La notation $\sum\limits_{i+j=k}$ *signifie que la somme porte sur tous les couples d'entiers positifs ou nuls* (i, j) *tels que* $i + j = k$.

Exemple 3.1.1. On lance deux dés réguliers à 4 faces et on note S la somme des résultats obtenus. Donner la loi de S.

On note X le résultat du 1er dé et Y le résultat du 2nd. Alors X et Y suivent la loi uniforme discrète sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et sont indépendantes.

La loi conjointe est donnée par : $P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On a $S = X + Y$. $S(\Omega) = \{2, \cdots, 8\}$ On a alors :

- $P(S=2) = P(X=1)P(Y=1) = \frac{1}{16}$ car
$$[S=2] = [X=1] \cap [Y=1]$$
- $P(S=3) = P(X=1)P(Y=2) + P(X=2)P(Y=1) = \frac{2}{16}$ car
$$[S=3] = \big([X=1] \cap [Y=2]\big) \cup \big([X=2] \cap [Y=1]\big)$$
- $P(S=4) = P(X=1)P(Y=3) + P(X=2)P(Y=2) + P(X=3)P(Y=1) = \frac{3}{16}$,
- $P(S=5) = P(X=1)P(Y=4) + P(X=2)P(Y=3) + P(X=3)P(Y=2) + P(X=4)P(Y=1) = \frac{4}{16}$,
- $P(S=6) = P(X=2)P(Y=4) + P(X=3)P(Y=3) + P(X=4)P(Y=2) = \dfrac{3}{16}$,
- $P(S=7) = P(X=3)P(Y=4) + P(X=4)P(Y=3) = \frac{2}{16}$,
- $P(S=8) = P(X=4)P(Y=4) = \frac{1}{16}$.

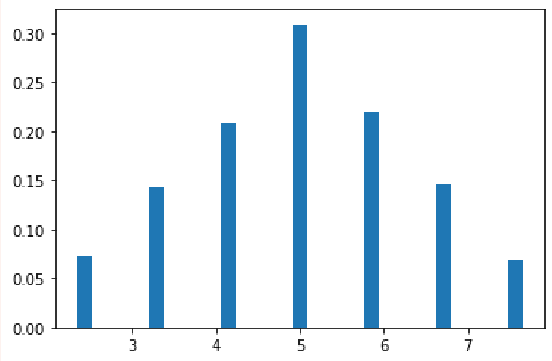
La somme $\sum\limits_{i=2}^{8} P(S=i)$ vaut bien 1.

Simulation informatique :

```
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def somme():
    z = rd.randint(1, 5, 2) # contient le lancer de deux des
    x = z[0]
    y = z[1]
    return x+y


# estimation de la loi de S

N = 1000

T = [0]*N
for k in range (N):
    T[k]=somme()

plt.hist(T, rwidth=0.2, density = True, range=(2,8), bins=7)
plt.show()
```

```
 2.   0.064
 3.   0.123
 4.   0.188
 5.   0.245
 6.   0.188
 7.   0.124
 8.   0.068
```

Loi de S



Méthode : Espérance de la somme de deux variables aléatoires discrètes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et $S = X + Y$ leur somme. Pour calculer $E(S)$, on peut :

- Utiliser la linéarité : $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
- Utiliser la loi de S et la définition de l'espérance : $E(S) = \sum_{s_k \in S(\Omega)} s_k P(S = s_k)$.
- Utiliser la loi conjointe et le théorème du transfert : $E(X + Y) = \sum_{x_i, y_j} (x_i + y_j) P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$.

Lemme 3.1.2. Formule de Vandermonde Soit m, n et k trois entiers naturels. Alors

$$\sum_{i+j=k} \binom{n}{i}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$$

avec la convention $\binom{q}{p} = 0$ si $p < 0$ ou $p > q$.

On peut aussi écrire :

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k} \qquad \sum_{j=0}^{m} \binom{n}{k-j}\binom{m}{j} = \binom{n+m}{k}$$

Démonstration. À compléter. □

Théorème : Stabilité de la loi binomiale pour la somme

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant des lois binomiales de paramètres respectifs (m, p) et (n, p). Alors la somme $X + Y$ suit la loi binomiale de paramètres $(m + n, p)$.

Pour la preuve, il suffit de se souvenir que la loi binomiale est la loi de la somme de variables de Bernouilli indépendantes. Voyons-en une autre par un calcul qui utilise la formule de Vandermonde :

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.1.3. En particulier, si $m = n = 1$: la somme de deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p est une variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(2, p)$. En généralisant (par récurrence) :

Corollaire : Somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli

Soit $n \geqslant 2$, $p \in]0;1[$ et $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ et suivant la même loi de Bernoulli de paramètre p. Alors $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ est une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et p : $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$.

En particulier, et grâce à l'indépendance, on retrouve :

$$V(S_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i) = np(1-p).$$

Ainsi : la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et de même espérance p suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.

La preuve est bien sûr une preuve par récurrence basée sur le résultat précédent.

Théorème : Stabilité de la loi de Poisson pour la somme

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Alors la somme $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$.

Ce résultat n'est pas très surprenant si on pense aux modèles qui utilisent la loi de Poisson, comme la loi d'un temps d'attente. Imaginons le cas d'un client qui attend son tour à un guichet et que son temps d'attente est modélisée par une loi de Poisson. Si le client doit attendre successivement à deux guichets, chacun des temps d'attente étant modélisé par une loi de Poisson de paramètre λ puis μ, alors son temps d'attente total (modélisé par la somme des deux lois de Poisson) suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda + \mu$. Vérifions maintenant cette intuition par le calcul.

Démonstration. À compléter.

□

3.2. Maximum ou minimum de deux variables aléatoires indépendantes.

Définition : Maximum ou minimum de deux variables aléatoires

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. On note $Z = \max(X,Y)$ (resp. $T = \min(X,Y)$) le maximum (resp. minimum) des deux variables aléatoires X et Y :

- $Z = \max(X,Y)$ est définie comme suit : $Z = \begin{cases} X & \text{si } X \geqslant Y \\ Y & \text{sinon} \end{cases}$
- $T = \min(X,Y)$ est définie comme suit : $T = \begin{cases} X & \text{si } X \leqslant Y \\ Y & \text{sinon} \end{cases}$

$\max(X,Y)$ et $\min(X,Y)$ sont deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$

S'il n'est pas facile d'expliciter directement la loi des variables minimum et maximum, il est en revanche plus facile de trouver les fonctions de répartition car il existe une formule générale.

Proposition : Fonction de répartition du maximum ou minimum de deux variables indépendantes

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles discrètes **indépendantes** définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit $Z = \max(X,Y)$ et $T = \min(X,Y)$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\boxed{F_Z(x) = F_X(x) \times F_Y(x)} \qquad \text{et} \qquad \boxed{1 - F_T(x) = \big(1 - F_X(x)\big) \times \big(1 - F_Y(x)\big).}$$

Démonstration. À compléter. □

Méthode : Loi du maximum ou du minimum de deux variables indépendantes

On cherche la fonction de répartition de $Z = \max(X, Y)$ ou $T = \min(X, Y)$, puis on calcule la loi de probabilité de Z et de T en appliquant la méthode permettant de retrouver la loi à partir de la fonction de répartition. Par exemple, si X et Y sont à valeurs entières : $P(Z = k) = F_Z(k) - F_Z(k-1)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.

Exemple 3.2.1. Donner la loi du maximum de deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{U}(\{1, 2, 3, 4\})$.

3.3. Produit de deux variables aléatoires indépendantes.

Méthode : Loi de probabilité du produit de deux variables aléatoires

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, la loi de leur produit $Z = XY$ est donnée par :

$$P(XY = z_k) = \sum_{x_i \times y_j = z_k} P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$$

Si, de plus, X et Y sont à valeurs entières strictement positives et indépendantes, on a :

$$\begin{aligned} P(XY = k) &= \sum_{i \times j = k} P(X = i)P(Y = j) \\ &= \sum_i P(X = i)P\left(Y = \frac{k}{i}\right) \\ &= \sum_j P\left(X = \frac{k}{j}\right)P(Y = j). \end{aligned}$$

(la somme portant sur les valeurs de i et j pour lesquelles $P(X = i)$ et $P(Y = j)$ sont toutes deux non nulles et telles que $i \times j = k$).

On peut également appliquer la formule des probabilités totales comme dans le cas de $S = X + Y$.

Exemple 3.3.1. On lance deux dés réguliers à 4 faces et on note M le produit des résultats obtenus. Donner la loi de M.

On note X le résultat du 1^{er} dé et Y le résultat du 2^{nd}. Alors X et Y suivent la loi uniforme sur $\{1, 2, 3, 4\}$ et sont indépendantes.

La loi conjointe est donnée par : $P\big([X = i] \cap [Y = j]\big) = P(X = i) \times P(Y = j) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$ pour tout $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

On a $M = XY$. $M(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16\}$. On a alors :

- $P(M = 1) = P(X = 1)P(Y = 1) = \frac{1}{16}$,
- $P(M = 2) = P(X = 1)P(Y = 2) + P(X = 2)P(Y = 1) = \frac{2}{16}$,
- $P(M = 3) = P(X = 1)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 1) = \frac{2}{16}$,
- $P(M = 4) = P(X = 1)P(Y = 4) + P(X = 2)P(Y = 2) + P(X = 4)P(Y = 1) = \frac{3}{16}$,
- $P(M = 6) = P(X = 2)P(Y = 3) + P(X = 3)P(Y = 2) = \frac{2}{16}$;
- $P(M = 8) = P(X = 2)P(Y = 4) + P(X = 4)P(Y = 2) = \frac{2}{16}$;
- $P(M = 9) = P(X = 3)P(Y = 3) = \frac{1}{16}$,

- $P(M = 12) = P(X = 3)P(Y = 4) + P(X = 4)P(Y = 3) = \frac{2}{16}$;
- $P(M = 16) = P(X = 4)P(Y = 4) = \frac{1}{16}$.

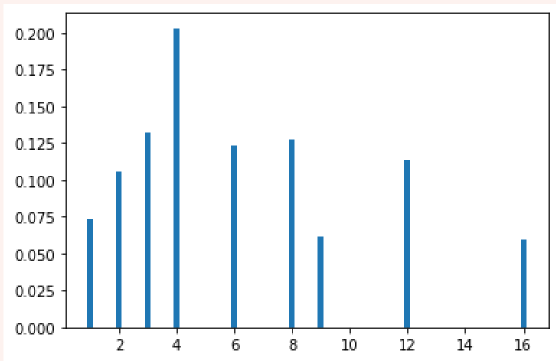
La somme $\sum_{i \in M(\Omega)} P(M = i)$ vaut bien 1.

Simulation informatique :

```python
import numpy.random as rd
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def produit():
    z = rd.randint(1, 5, 2) # contient le lancer de deux des
    x = z[0]
    y = z[1]
    return x*y


# estimation de la loi de S

N = 1000

T = [0]*N
for k in range (N):
    T[k]=produit()

plt.hist(T, rwidth=0.2, density = True, range=(1,17), bins=16, align
    ='left')
plt.show()
```

```
1.    0.063
2.    0.124
3.    0.137
4.    0.203
6.    0.118
8.    0.131
9.    0.043
12.   0.117
16.   0.064
```

Loi de M



Méthode : Espérance du produit de deux variables aléatoires discrètes

Soit X et Y deux variables aléatoires discrètes et $Z = XY$ leur produit. Pour calculer $E(Z)$, on peut :

- Calculer $E(X) \times E(Y)$ si X et Y sont **indépendantes**, car $E(XY) = E(X)E(Y)$ (i.e. $\text{Cov}(X,Y) = 0$).
- Utiliser la loi de Z et la définition de l'espérance : $E(Z) = \sum\limits_{z_k \in Z(\Omega)} z_k P(Z = z_k)$.
- Utiliser la loi conjointe et le théorème du transfert : $E(XY) = \sum\limits_{x_i, y_j} x_i y_j P\big([X = x_i] \cap [Y = y_j]\big)$.

Exercice 3.3.2. Avec les notations de l'exemple 3.3.1, calculer $E(XY)$ de trois façons différentes.

4. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Tous les sujets sur listés dans le cours de révisions sur les variables discrètes contiennent aussi des questions sur des couples de lois discrètes.