CHAPITRE III

COMPLÉMENTS SUR LES SÉRIES NUMÉRIQUES

Table des matières

ECG 2 Maths appliquées, http://louismerlin.fr.

1. Définitions et propriétés.

1.1. Définitions.

Définition : Série numérique.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- On appelle **série** de terme général u_n la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ définie par :
$$\forall N \geqslant 0, \qquad S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k.$$
Cette série est notée $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ ou simplement $\sum u_k$, et S_N est appelée la **somme partielle** d'indice N.
- On dit que la série de terme général u_n converge si et seulement si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge.
- Lorsque la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge, sa limite est appelée **somme** de la série et est notée : $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$. En d'autres termes, si la série de terme général u_n converge, sa somme est :
$$S = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{N} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$
- On dit que la série de terme général u_n diverge si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ diverge, c'est-à-dire n'a pas de limite finie ou tend vers $\pm\infty$.
- Lorsque la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge et a pour somme S, on appelle **reste d'indice** N le réel :
$$R_N = S - S_N = \sum_{k=N+1}^{+\infty} u_k.$$

Attention, avant d'écrire $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ il faut justifier que la série est convergente. Cette notation n'a de sens que si l'on sait que la série converge (puisque c'est la limite des sommes partielles). Il ne faut donc pas confondre les notations $\sum u_k$ qui est une série qui peut être convergente ou divergente et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ qui sous-entend déjà que la série est convergente.

Remarque 1.1.1. Si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge, alors $\lim\limits_{N\to+\infty} R_N = 0$.

Exemple 1.1.2. La série de terme général $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente car sa somme partielle :
$$S_N = \sum_{k=0}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}}{1-\frac{1}{2}}$$
a pour limite $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$.

Proposition : Série harmonique.

La **série harmonique** est la série de terme général $\dfrac{1}{n}$.

La série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$ diverge (vers $+\infty$).

Démonstration. À compléter. □

1.2. **Condition nécessaire de convergence.**

Théorème : Condition nécessaire de convergence.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite. Si la série de terme général u_n converge, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.2.1.

- C'est une condition nécessaire mais non suffisante : pour que la série converge **il faut** que la suite (u_n) converge vers 0 mais **cela ne suffit pas**. En d'autres termes, si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ peut converger ou diverger. Il faut en fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tende vers 0 *suffisamment vite.*

  Par exemple, la série harmonique diverge alors que la suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ tend vers 0.
- C'est donc surtout utile pour la contraposée : si la suite (u_n) **ne converge pas** vers 0, alors la série de terme général u_n **diverge**.

$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0 \text{ alors } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ diverge.}}$$

  Par exemple, la série de terme général $u_n = \frac{n}{n+1}$ est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \neq 0$.

1.3. **Propriétés et opérations sur les séries convergentes.**

Proposition : Décalage.

Deux séries qui ne diffèrent que d'un nombre fini de termes sont de même nature.

Plus précisément, soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge si, et seulement si, la série $\sum\limits_{k\geqslant n_0} u_k$ converge. On a alors :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

Remarque 1.3.1. Attention : deux séries qui diffèrent d'un nombre fini de termes ne sont pas forcément de même somme si elles sont convergentes.

Proposition : Linéarité.

Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\sum\limits_{k\geq 0} u_k$ et $\sum\limits_{k\geq 0} v_k$ deux séries **convergentes**. Alors la série de terme général $w_k = \alpha u_k + \beta v_k$ est convergente, et l'on a :

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(\alpha u_k + \beta v_k) = \alpha\left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right) + \beta\left(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right).$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.3.2. Avant de faire une opération sur les sommes infinies il faut TOUJOURS justifier la convergence des séries en question.

1.4. **Convergence absolue.**

Définition : Convergence absolue.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est dite **absolument convergente** si et seulement si la série $\sum_{k\geqslant 0} |u_k|$ converge.

Exemple 1.4.1. La série de terme général $\frac{(-1)^n}{2^n}$ est absolument convergente. En effet, $\left|\frac{(-1)^n}{2^n}\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème : La convergence absolue implique la convergence.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

$$\boxed{\text{Si } \sum_{n\geqslant 0} |u_n| \text{ converge alors } \sum_{n\geqslant 0} u_n \text{ converge.}}$$

Démonstration. Hors programme. □

Exemple 1.4.2. La série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{2^n}$ est donc convergente puisqu'elle est absolument convergente.

Remarque 1.4.3. Une série peut être convergente sans être absolument convergente. On dit alors qu'elle est semi-convergente. L'étude des séries semi-convergentes est bien plus difficile. Elle apparaît parfois aux concours sous la forme d'un problème (souvent lié aux intégrales).

Par exemple la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n}$ est semi-convergente (et converge vers $\ln 2$). On en verra la preuve en exercice.

▶ **Pour s'entraîner : ex. 3**

Méthode : Utiliser la convergence absolue.
Lorsque l'on cherche à étudier la convergence d'une série de terme général u_n de signe quelconque, on commence toujours par étudier la convergence de la série de terme général $|u_n|$. C'est en général beaucoup plus facile parce qu'on dispose de tous les outils de la section suivante.

2. Convergence des séries à termes positifs.

La convergence absolue implique la convergence, il est donc utile d'avoir des critères de convergence concernant les séries à termes positifs.

2.1. Premier critère de convergence.

Pour une série à termes positifs, il n'y a que deux scenario : soit la série converge, soit la série diverge vers $+\infty$. En effet,

Proposition : Premier critère de convergence.
Soit $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ une série à **termes positifs**. Alors la série $\sum_{k\geqslant 0} u_k$ converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est majorée. Sinon, elle diverge vers $+\infty$.

Démonstration. À compléter. □

Exemple 2.1.1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Étudier alors la nature de la série $\sum_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k^2}$.

2.2. Critères qualitatifs de convergence ou divergence.

Il existe trois critères qualitatifs, c'est-à-dire qui donnent la convergence ou la divergence, mais pas la valeur de la somme dans le cas convergent. Deux critères sont asymétriques (donc attention aux hypothèses !), un critère est symétrique.

Théorème : Critère de comparaison par majoration des séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à **termes positifs** vérifiant (à partir d'un certain rang) : $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$.

1. Si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ converge alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge.
2. Si la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ diverge, alors la série $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ diverge.

Démonstration. À compléter. □

Exemple 2.2.1. Comparer $\dfrac{1}{n}$ et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ et en déduire la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{\sqrt{k}}$.

Exemple 2.2.2. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{1}{k5^k}$.

Théorème : Critère de comparaison par négligeabilité des séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes **positifs**.

1. Si $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathbf{o}(v_n)$ et si $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ converge alors $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ converge.
2. Si $u_n \underset{n\to\infty}{=} \mathbf{o}(v_n)$ et si $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ diverge alors $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ diverge.

Démonstration. À compléter. □

Dans le cas où les termes généraux sont équivalents, les séries sont de mêmes natures et on peut même dire plus sur les restes ou les sommes partielles des séries.

Théorème : Critère de comparaison par équivalence des séries à termes positifs.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites à termes **positifs**. On suppose que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. Alors les séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ sont **de même nature** : elles divergent ou convergent simultanément. De plus,

1. Lorsque les séries sont toutes les deux convergentes, les restes sont équivalents :
$$\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=n+1}^{\infty} v_k.$$
2. Lorsque les séries sont toutes les deux divergentes, les sommes partielles sont équivalentes :
$$\sum_{k=0}^{n} u_k \underset{n\to\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} v_k.$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.2.3. Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les séries $\sum\limits_{k\geqslant 0} u_k$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0} v_k$ sont de même nature mais les sommes ne sont pas forcément égales !

Exemple 2.2.4. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right)$.

▶ **Pour s'entraîner : ex. 2**

3. Séries de références.

3.1. Séries télescopiques.

Théorème : Convergence des séries télescopiques.
La série de terme général $u_{n+1} - u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.

Démonstration. À compléter. □

Méthode : séries télescopiques.
Calculer la somme partielle S_N d'indice N en simplifiant au maximum les termes (lorsqu'ils s'annulent les uns les autres). Il ne restera que quelques termes dans S_N pour étudier la limite $N \to +\infty$. Bien sûr, cette méthode ne marche que lorsque l'on peut effectivement calculer S_N de cette manière.

Exemple 3.1.1. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{k\geqslant 2} \ln\left(\frac{k+1}{k-1}\right)$ et calculer sa somme si elle est convergente.

3.2. Séries géométriques.

Les séries géométriques apparaissent très souvent. Non seulement, on sait rapidement décider de leurs convergences mais il existe aussi des stratégies de comparaison à des séries géométriques (règles de Cauchy et de D'Alembert).

Définition : Série géométrique.
Soit q un nombre réel. La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} q^k$ s'appelle **série géométrique** de raison q.

Théorème : Convergence des séries géométriques.
La série $\sum\limits_{k\geqslant 0} q^k$ est convergente si et seulement si $|q| < 1$ et, dans ce cas, sa somme vaut :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}}$$

Démonstration. À compléter. □

Exemple 3.2.1. $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{3^k} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 = \dfrac{1}{2}$.

Théorème : Convergences des séries géométriques dérivées première et seconde.

1. La série $\sum\limits_{k\geqslant 1} kq^{k-1}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, sa somme vaut :
$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.}$$
On l'appelle **série géométrique dérivée (première)**.
2. La série $\sum\limits_{k\geqslant 2} k(k-1)q^{k-2}$ converge si et seulement si $|q| < 1$ et dans ce cas, sa somme vaut :
$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.}$$
On l'appelle **série géométrique dérivée seconde**.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.2.2. Attention, on ne peut pas dériver les sommes infinies (il y a bien une théorie sur cette question mais elle est hors programme) mais c'est un bon moyen pour se souvenir de ces sommes.

Méthode : convergence des séries pseudo-géométriques.

À partir de ces séries, on peut étudier $\sum_{k\geqslant 0} kq^k$ et $\sum_{k\geqslant 0} k^2q^k$ si $|q|<1$. En effet :

- $\forall k\geqslant 0,\quad kq^k = q\times kq^{k-1}$ donc on factorise par q et on utilise la série géométrique dérivée première
- $\forall k\geqslant 0,\quad k^2q^k = q^2\times k(k-1)q^{k-2} + q\times kq^{k-1}$ et on est ramené à la somme de deux séries convergentes : on factorise par q^2 et q et on utilise les séries géométriques dérivées première et seconde.

Remarque 3.2.3. Dans chacun des deux cas, on trouve :

$$\sum_{k=0}^{N} kq^k = 0+\sum_{k=1}^{N} kq^k = q\left(\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}\right) \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{q}{(1-q)^2}.$$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N} k^2q^k &= \sum_{k=0}^{N} k(k-1)q^k + \sum_{k=0}^{N} kq^k\\ &= 0+0+q^2\left(\sum_{k=2}^{N} k(k-1)q^{k-2}\right)+0+q\left(\sum_{k=1}^{N} kq^{k-1}\right)\\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{2q^2}{(1-q)^3}+\frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}\end{aligned}$$

Ces formules ne sont pas à apprendre et sont à savoir retrouver à chaque fois avec la méthode.

Exercice 3.2.4. Quelle est la nature et la somme éventuelle des séries $\sum_{k\geqslant 0}\frac{k}{2^k}$, $\sum_{k\geqslant 0}\frac{k^2}{2^k}$?

3.3. **Séries exponentielles.**

Définition : Série exponentielle.

Soit x un réel. La série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!}$ s'appelle **série exponentielle**.

Théorème : Convergence des séries exponentielles.

Pour tout nombre réel x, la série $\sum_{k\geqslant 0}\frac{x^k}{k!}$ est convergente et sa somme vaut :

$$\boxed{\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = e^x.}$$

Démonstration. Admis. En fait, c'est la bonne *définition* de la fonction exponentielle. Remarquer tout de même que l'on peut montrer la converge de la série par le critère de d'Alembert (mais pas la valeur de la somme). □

Exemple 3.3.1. $1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\ldots=e^1\approx 2,718$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{2^k k!}=\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k!}=e^{1/2}-1=\sqrt{e}-1\approx 0,649.$

Remarque 3.3.2. La convergence de la série exponentielle implique, d'après la condition nécessaire de convergence :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \lim_{n\to+\infty}\frac{x^n}{n!}=0 \qquad \text{et en particulier :} \qquad e^n=\underset{+\infty}{\mathbf{o}}(n!)$$

ce qui justifie *a posteriori* une formule de croissance comparée liant l'exponentielle à la factorielle.

▶ **Pour s'entraîner : ex. 1**

3.4. Séries de Riemann.

Définition : Série de Riemann.

On appelle **série de Riemann** une série dont le terme général est $\dfrac{1}{n^\alpha}$, où α est un réel strictement positif fixé.

Exemple 3.4.1. Pour $\alpha=1$, on retrouve la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n}$.

Théorème : Convergence des séries de Riemann.

Soit α un nombre réel strictement positif. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha>1$.

Démonstration. À compléter.

□

Remarque 3.4.2. Si $\alpha>1$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$ converge mais on ne sait pas exprimer la somme en général.

Exemple 3.4.3. La série harmonique diverge, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^2}$ converge (vers $\dfrac{\pi^2}{6}$) et la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Méthode : très utile pour montrer la convergence d'une série.

Si $n^\alpha|u_n|$ converge vers 0 alors $|u_n|=\underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ et si $\alpha>1$ alors la série $\sum u_k$ est absolument convergente donc convergente.

On utilisera souvent cette proposition pour $\alpha=2$ (méthode du n^2).

Exemple 3.4.4. La série $\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{(-1)^k}{k^2(k-\ln(k))}$ converge.

▶ **Pour s'entraîner : ex. 4**

3.5. Comparaison série-intégrale.

Inspiré par la preuve de la convergence des séries de Riemann, on peut établir un cadre général de comparaison série/intégrale. L'intérêt de ce théorème est double : pour le moment il nous sert à justifier la convergence d'une série lorsque l'on sait que l'intégrale correspondante converge. Mais, dans le cours sur l'intégration, on utilisera le même résultat dans le sens inverse, pour montrer cette fois la convergence de l'intégrale.

On rappelle la définition d'intégrale convergente.

Définition : Intégrale convergente en $+\infty$.

Soit f une fonction continue sur un intervalle non borné $[a;+\infty]$. On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **convergente** si, et seulement si, la fonction $y \mapsto \int_a^y f(t)dt$ possède une limite finie quand y tend vers $+\infty$. On a alors :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(t)\,dt.$$

Théorème : Comparaison série-intégrale.

Soit f une fonction **continue**, **positive** et **décroissante** sur l'intervalle $[a;+\infty[$. Alors la série $\sum\limits_{n\geqslant a} f(n)$ et l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ sont de même nature.

Attention, ce théorème est hors programme ! Il ne peut donc pas être utilisé directement dans la résolution d'un problème. Cependant, la méthode est très classique et plusieurs exercices de concours se proposent de vous faire établir la convergence d'une série à l'aide d'une comparaison avec une intégrale... tout en vous demandant de refaire toute la démarche. Il faut donc bien connaître la preuve de ce théorème, qui est parfois rédigée en une petite série de questions de concours.

Démonstration. À compléter. □

▶ **Pour s'entraîner : ex. 5**

4. Récapitulatif : plan d'étude d'une série

1. Le terme général de la série tend-il vers 0 ? Si la réponse est non alors la série diverge et l'étude est terminée.

2. On écrit la somme partielle de la série et on tente de faire ressembler à une série de référence par relation de Chasles, changement d'indice, factorisation.

Le cas échéant, on conclut sur la convergence et si on a les formules on peut calculer la somme.

3. Le terme général est-il positif ?

- Si oui, on peut essayer d'utiliser les théorèmes de comparaison avec les séries de références ou de montrer que la suite des sommes partielles est majorée.
- Sinon, on montre la convergence absolue avec les comparaisons.

4. Si la série ne converge pas absolument et ne diverge pas grossièrement, alors c'est un cas difficile...

5. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Remarque 5.0.1. **1.** Nous traiterons certains des sujets suivants en exercices, en travaux dirigés, en colles ou en devoir. Pour les autres, il existe des corrigés que l'on trouve facilement sur Internet. Ces corrigés sont parfois très rapides, n'hésitez pas à venir m'en parler si vous pensez qu'une question mérite des explications supplémentaires.

2. Les sujets de concours sont souvent pensés pour faire appel à plusieurs parties du programme. Dans la liste qui suit figurent les exercices pour lequel il est *nécessaire* de connaître les résultats de ce chapitre. Mais parfois *ce n'est pas suffisant* car d'autres parties du cours sont aussi impliquées. J'indique ces situations avec le symbole * si l'exercice ne peut être traité avec les connaissances de ce chapitre uniquement.

3. Cette liste n'est pas exhaustive.

Remarque 5.0.2. Peu d'exercices de concours ont pour objectif d'étudier uniquement la convergence d'une série, c'est en fait plutôt un outil qui sert à étudier des lois de probabilités discrètes. En effet, l'espérance (et les autres moments) d'une loi discrète s'exprime avec une série. En statistique, la convergence des estimateurs utilise souvent un argument de convergence de séries. Dans la liste qui suit, j'indique les exercices de concours qui nécessite un vrai travail pour montrer la convergence d'une série mais on trouve parfois quelques questions isolées dans d'autres sujets.

1. **ECRICOME**
   - 1988 Problème *.
   - 1993 Exercice 1.
   - 1996 Exercice 2 (avec des fonctions cos et sin désormais hors programme).
   - 1997 Exercice 1.
   - 2004 Exercice 3 (une question).
   - 2009 Exercice 3 *.
   - 2012 Exercice 3.
   - 2013 Exercice 3.
   - 2018 Exercice 2 et 3 *.
2. **EDHEC**
   - 1997 Exercice 2.
   - 1999 Problème (partie I seulement).
   - 2000 Exercice 3 (la dernière question).
   - 2001 Problème *
   - 2003 Exercice 1 *.
   - 2005 Problème *.
   - 2006 Problème **.
   - 2008 Problème (somme de Riemann) *.
   - 2013 Exercice 1 *.
   - 2014 Exercice 1 *.
   - 2015 Problème * (et un peu dans l'exercice 2 *).
   - 2016 Problème (au début, le reste est *).
   - 2018 Exercice 3 * et la fin du problème.
   - 2020 Problème *.
3. **EML**
   - 2002 Exercice 3 (le début est faisable dès maintenant, la suite est *).
   - 2006 Exercice 2 *.
   - 2012 Exercice 3 *.
   - 2014 Exercice 3 *.
   - 2015 Exercice 2 (la fin est *).
   - 2021 Problème 1 (la fin est *).
   - 2022 Exercice 1 et 3.
4. **ESCP**
   - 1982 Exercice 3 *.
   - 1987 Épreuve III Exercice 1 *.

- 1988 Épreuve III Exercice 3 * (somme de Riemann).
- 2001 Épreuve III Exercice 2 *.
- 2002 Épreuve II ^{star} (à la fin, une étude statistique) .
- 2005 Épreuve III Problème.

5. ESC

- 2006 Exercice 3 *.
- 2007 Exercice 3 *.

6. ESSEC

- 1982 Épreuve I Exercice 4.
- 1983 Épreuve I Exercice 3.
- 1986 Épreuve 2 Partie II *.
- 1988 Épreuve II Partie II.
- 1990 Épreuve II Exercice 1.
- 1993 Épreuve II Partie II.
- 1996 Épreuve II Partie I (quelques arguments utilisent des théorèmes qui sont dorénavant hors programme).
- 1997 Épreuve III Problème 1.
- 1999 Épreuve II Partie I.
- 2001 Épreuve II Partie II.
- 2001 Épreuve III Exercice 1 (avec fonctions trigonométriques hors programme).
- 2004 Épreuve II Partie III *.
- 2005 Épreuve II Partie I *.
- 2011 Épreuve II Partie II *.
- 2013 Épreuve II Partie I * et III *.
- 2016 Épreuve I Partie II *.
- 2016 Épreuve II Partie II *.
- 2020 Épreuve II *.
- 2021 Épreuve I *.

7. HEC

- 2009 Problème (au début).
- 2010 Problème *.
- 2021 Problème Partie III *.