CHAPITRE I

COMPLÉMENTS SUR LES SUITES NUMÉRIQUES

Table des matières

1. Limites de suites.

1.1. **Suites convergentes ou divergentes.** On rappelle tout d'abord la définition fondamentale de la convergence d'une suite :

Définition : Suites convergentes.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang N de la suite tel que, si $n \geqslant N$, alors

$$|u_n - l| \leqslant \varepsilon.$$

Dans ce cas on dit que l est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et on note

$$\ell = \lim_{n\to\infty} u_n.$$

Si une suite admet une limite (réelle), on dit qu'elle est convergente. Dans tous les autres cas, on dit qu'elle est divergente.

Autrement dit, une suite converge vers ℓ si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. De manière encore plus imagée, u_n est arbitrairement proche de ℓ, pourvu que n soit suffisamment grand.

Exemple 1.1.1. Vérifier, à l'aide de la définition de la convergence uniquement, que les suites de termes généraux

$$u_n = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{n+1}{n+2}$$

convergent respectivement vers 0 et 1.

Remarque 1.1.2. Même si, comme nous venons de le voir, il est possible de montrer qu'une suite converge avec la définition de la convergence seule, cette méthode n'est jamais utilisée. Nous verrons dans la suite de ce chapitre des techniques beaucoup plus efficaces pour établir la convergence d'une suite. La définition de la convergence est utilisée exceptionnellement dans des situations théoriques, ou pour faire les preuves de certaines propriétés.

Dans le cas des suites divergentes, on distingue encore deux cas : les suites qui divergent vers + ou $-\infty$ et les autres (qui n'ont donc ni limite finie, ni infinie).

Définition : Suites divergentes vers $\pm\infty$.
On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si pour tout nombre $A > 0$, il existe un rang N de la suite pour lequel, si $n \geqslant N$, alors,

$$u_n \geqslant A \quad \text{(respectivement } \ u_n \leqslant -A).$$

Dans ce cas on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \text{ (respectivement } \lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty).$$

La notation lim pour une suite qui diverge vers $\pm\infty$ est un peu gênante (mais commode).

Proposition : Premières propriétés des suites convergentes.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de nombres réels. Alors

- La limite est unique : si $\lim\limits_{n\to\infty} = \ell_1$ et $\lim\limits_{n\to\infty} = \ell_2$, alors nécessairement $\ell_1 = \ell_2$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
- Toute sous-suite extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également convergente, et de même limite. En particulier : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.1.3. Attention, inversement, une suite bornée n'est pas nécessairement convergente, par exemple $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Méthode : Utiliser les sous-suites pour montrer qu'une suite diverge.

On peut utiliser la propriété des sous-suites sous sa forme contraposée : si on a deux sous-suites de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui n'ont pas la même limite alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas.

Exemple 1.1.4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = (-1)^n$ est divergente car la suite paire et la suite impaire extraites n'ont pas les mêmes limites (respectivement 1 et -1).

Exercice 1.1.5. Vrai ou Faux : une suite non bornée diverge vers + ou $-\infty$?

La réciproque du troisième point de la proposition précédente est aussi vraie :

Théorème : Sous-suites paire et impaire extraite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si les sous-suites extraites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers la même limite ℓ, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite ℓ.

Démonstration. À compléter. □

1.2. **Suites géométriques.** Regardons tout d'abord le cas des suites $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Le résultat suivant est sûrement familier.

Théorème : Limite de q^n.

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Si $q < -1$ ou $q = -1$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite (donc diverge).
- Si $q = 1$ alors $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite constante égale à 1 et donc converge vers 1.

Démonstration. À compléter. □

Méthode : limite d'une suite géométrique.

Pour étudier la limite d'une suite géométrique définie par u_0 et $u_n = q^n u_0$, il ne faut pas oublier de tenir compte du signe de u_0 et appliquer les règles sur les opérations concernant les limites (paragraphe suivant).

1.3. **Opérations sur les limites.** On peut ajouter ou multiplier termes à termes les éléments de deux suites. Que se passe-t-il alors pour les limites ?

Proposition : Sommes, produits et quotients de limites.

Si deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes, de limites respectives ℓ_1 et ℓ_2, alors :

- Leur somme $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de limite $\ell_1 + \ell_2$;
- Leur produit $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergent, de limite $\ell_1 \ell_2$;
- Si $\ell_2 \neq 0$, leur quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\geq n_0}$ (défini à partir d'un certain rang n_0) est convergent, de limite $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

Démonstration. À compléter. □

Exercice 1.3.1. Dans le dernier cas de la proposition précédente, expliquer pourquoi, si

$$\lim_{n\to\infty} v_n = \ell_2 \neq 0,$$

alors $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang (et donc le quotient $\frac{u_n}{v_n}$ est bien défini).

Il existe des situations qui ne sont pas couvertes par la proposition précédente, on dit qu'on fait face à une **forme indéterminée (F.I.)**. En effet, on ne peut pas conclure dans les cas suivants :

$$\infty - \infty \qquad \infty \times 0 \qquad \frac{\ell}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty} \qquad \text{et} \qquad \frac{0}{0}.$$

En général pour lever les formes indéterminées, il faut trouver le terme dominant, on y reviendra dans la dernière partie de ce chapitre (qui nous donnera précisément les outils pour repérer les termes dominants).

1.4. **Unicité de la limite et suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.** On s'intéresse maintenant à la limite des suites définies par une relation de récurrence.

Exemple 1.4.1. On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

Le programme Python suivant permet de calculer et d'afficher les n premiers termes de la suite, où n est un paramètre donné par l'utilisateur.

```python
def calculerTermeSuite(n):
    u=1
    for index in range (n):
        u=u**2+1
    print(u)
```

Définition : Point fixe.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **point fixe** de f tout réel x_0 solution de l'équation $f(x) = x$. Autrement dit :

$$\boxed{x_0 \text{ est un point fixe de } f \text{ si, et seulement si } f(x_0) = x_0.}$$

Méthode : recherche d'un point fixe.

La plupart du temps, pour déterminer un point fixe d'une fonction, il faudra poser $g(x) = f(x) - x$ et chercher les solutions de l'équation $g(x) = 0$. Si l'on ne peut pas résoudre cette équation de manière algébrique, le théorème de la bijection pourra assurer l'existence d'une unique solution α, et une valeur approchée pourra être déterminée par dichotomie ou grâce à l'étude d'une suite récurrente de limite α.

Exercice 1.4.2. Montrer que la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = e^{-x}$ possède un unique point fixe α, et que $\alpha \in [0, 1]$.

Le théorème de la bijection montre *qu'il existe* une solution à l'équation $f(x) = x$ mais *ne permet pas de trouver cette solution.* En général c'est impossible explicitement mais on peut utiliser un programme informatique pour approcher la valeur de cette solution

Exemple 1.4.3. On reprend l'exemple de la fonction précédente et de la recherche de son point fixe α dans $[0, 1]$. On cherche une valeur approchée de α avec une précision ε qui est à fixer par l'utilisateur.

On peut alors par exemple procéder de la manière suivante :

```python
import math

def g(x):
    return math.exp(-x)-x


def valeurapprochee(epsilon):
    a = 0
    b = 1
    while b-a > epsilon:
        m = (a+b)/2
        if g(m) == 0:
            return m
        elif g(a)*g(m) > 0:
            a = m
        else:
            b = m
    return a


solution = valeurapprochee(10**(-3))
print(solution)
```

Cet algorithme utilise la méthode de la **dichotomie.**

Définition : Intervalle stable.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que l'intervalle I est **stable** par f si, et seulement si, pour tout réel x de I, $f(x)$ est élément de I.

En particulier, l'intervalle $[a, b]$ est stable par f si, et seulement si :

$$\text{si } a \leqslant x \leqslant b \text{ alors } a \leqslant f(x) \leqslant b.$$

Ou encore

$$\min_{x\in[a,b]} f(x) \geqslant a \quad \text{et} \quad \max_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant b.$$

Méthode : Intervalle stable.

Pour montrer qu'un intervalle $[a, b]$ est stable par f, on pourra :

1. Partir de $a \leqslant x \leqslant b$ et effectuer des opérations élémentaires pour arriver à $a \leqslant f(x) \leqslant b$;
2. Étudier les variations de f sur $[a, b]$ pour trouver ses extremums.

Exemple 1.4.4.

1. Soit $f(x) = \sqrt{2x+4}$, pour tout $x \geqslant -2$. Montrer que l'intervalle $[0, 4]$ est stable par f.
2. Soit $f(x) = x(1-x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intervalle $[0, 1]$ est stable par f.

Théorème : Théorème du point fixe.

Soit f une fonction définie sur un intervalle stable I, et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, et si f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f :

Schématiquement

$$\boxed{\text{Si } \left\{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) \\ \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell \\ f \text{ continue en } \ell \end{array}\right\} \text{ Alors } f(\ell) = \ell}$$

Démonstration. À compléter. □

Remarque 1.4.5. L'intervalle stable I sert à établir que la suite est bien définie : on prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $u_n \in I$ pour tout n.

Pour montrer qu'un intervalle est stable, on peut se référer à la méthode.

Méthode : Limite des suites définies par une relation de récurrence.

On considère une suite définie par un premier terme u_0 et par la relation

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

Le théorème du point fixe nous donne des candidats potentiels pour les limites de u. En effet, *si* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors sa limite est forcément l'un des points fixes de f. Le fait de connaître a priori la limite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut nous guider. En effet, il est fréquent que l'on démontre que la suite converge à l'aide du théorème de la limite monotone 3.2. Pour appliquer ce théorème, il faut montrer que la suite est bornée et le fait de connaître la limite potentielle permet de deviner les bons encadrements (ou la bonne monotonie), puis de les démontrer par récurrence.

► **Pour s'entraîner : exo 8.**

2. Limites de suites et inégalités.

2.1. **Passage à la limite dans les inégalités.** Dans ce paragraphe, on montre que certaines inégalités entre suites se transmettent à leurs limites. On retiendra que les inégalités larges $\leqslant$, $\geqslant$ passent à la limite tandis que les inégalités strictes $<$, $>$ s'affaiblissent à la limite en des inégalités larges. Plus précisément :

Théorème : Passage à la limite dans les inégalités larges.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite ℓ.

Si $a \leqslant u_n \leqslant b$ (à partir d'un certain rang), alors $a \leqslant \ell \leqslant b$.

En particulier, si $u_n \geqslant 0$ (à partir d'un certain rang), alors $\ell \geqslant 0$.

Démonstration. À compléter. □

Corollaire : Comparaison de limites.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang. Si les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers ℓ et ℓ' alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.1.1. **Ces résultats sont faux avec des inégalités strictes.**

Par exemple, $\frac{1}{n} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, mais $\ell = \lim \frac{1}{n} = 0$ donc ℓ n'est pas strictement positive !

Également, si $u_n = 2 - \dfrac{1}{n}$ et $v_n = 2 + \dfrac{1}{n}$, alors on a : $u_n < v_n$ pour tout $n \geqslant 1$, et pourtant $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 2 = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

Théorème : Théorèmes de minoration

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.

- Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

- Si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$ alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $-\infty$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.1.2. On ne peut rien dire si $u_n \leqslant v_n$ (pour tout $n \in \mathbb{N}$) avec $\lim u_n = -\infty$ ou $\lim v_n = +\infty$.

Par exemple, avec $v_n = n$, on peut prendre successivement $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $u_n = n - 1$. L'une de ces suites tend vers 0, l'autre vers $+\infty$ et pourtant elles sont toutes deux inférieures à v_n.

2.2. **Encadrements de suites.** Le théorème suivant est très souvent utilisé.

Théorème : Théorème des gendarmes ou des encadrements.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles que :

$$\forall n \geqslant n_0, \qquad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n.$$

Supposons de plus que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite ℓ. Alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, de même limite ℓ.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 2.2.1. On ne peut rien dire si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne convergent pas vers la même limite.

3. Suites monotones et limites

Pour étudier la convergence d'une suite, il est souvent avantageux d'utiliser sa monotonie : c'est l'une des hypothèses du théorème de la limite monotone, qui permet de montrer qu'une suite converge.

3.1. **Suites monotones.**

Définition : Suites croissantes, décroissantes.

- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant u_{n+1}$.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant u_{n+1}$.
- Une suite **monotone** est une suite croissante ou décroissante.

Méthode : Comment déterminer la monotonie d'une suite réelle.

- Cas général : on étudie la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ et on détermine si son signe est fixe pour n assez grand :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si } \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0 \text{ alors } (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est croissante} \\ \text{Si } \forall n \geqslant n_0, \quad u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \text{ alors } (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ est décroissante} \end{array}}$$

- Cas des suites à termes positifs : si **tous** les termes de la suite sont strictement positifs (à partir d'un certain rang), on compare le quotient de deux termes consécutifs à 1 :

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Si} \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \left\{ \begin{array}{c} u_n > 0 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1 \end{array} \right\}, \text{ alors } (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ croissante} \\ \text{Si} \quad \forall n \geqslant n_0, \quad \left\{ \begin{array}{c} u_n > 0 \\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1 \end{array} \right\}, \text{ alors } (u_n)_{n\geqslant n_0} \text{ décroissante} \end{array}}$$

- Cas des suites définies par une formule de récurrence : on peut établir la monotonie d'une suite récurrente en étudiant le signe de $f(x) - x$, ou en prouvant la proposition $\mathcal{P}(n)$ par récurrence.

  On pose $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \leqslant u_{n+1}$ " pour montrer qu'elle est croissante, ou $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \geqslant u_{n+1}$ " pour montrer qu'elle est décroissante.

Cette méthode fonctionne très bien pour les suites du type $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est une fonction croissante.

- Cas des suites définies implicitement : pour les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par une équation du type $f_n(u_n) = a$ (avec a réel fixé) ou $f(u_n) = v_n$ (où $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée), on compare $f_n(u_n)$ avec $f_n(u_{n+1})$ puis on utilise la monotonie de f_n.

3.2. **Suites majorées, minorées, bornées.** Le théorème suivant s'utilise souvent, en particulier dans le cas des suites définies par une relation de récurrence.

Théorème : Théorème de la limite monotone.

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

Démonstration. La démonstration est hors programme. Dans le premier cas (croissante et majorée), il s'agirait en effet de montrer que la suite converge vers sa *borne supérieure*, qui est le plus petit de ses majorants. Cette notion de borne supérieure n'est pas au programme mais il faut cependant faire bien attention à la remarque suivante, qui s'inspire de la démonstration. □

Remarque 3.2.1. Pour une suite croissante, le majorant de la suite est un majorant de la limite mais **ce n'est pas nécessairement la limite.** Comme expliqué plus haut, la limite est en fait **le plus petit des majorants**. Plus concrètement, imaginons qu'on ait réussi à démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est (croissante et) majorée par M. On sait alors que la limite est un nombre $\ell \leqslant M$. Mais, rien ne nous dit qu'avec un peu de travail supplémentaire, on ne puisse pas trouver une majoration plus fine, c'est-à-dire, trouver un réel $M' \leqslant M$ tel que, pour tout n, $u_n \leqslant M'$, ce qui montrerait que la limite vérifie en fait $\ell \leqslant M'$ et donc en particulier $\ell \neq M$.

Méthode : limite d'une suite monotone.

Pour la convergence d'une suite monotone, on distingue deux possibilités : soit elle est bornée et elle converge, soit elle n'est pas bornée et elle diverge vers l'infini. Précisément :

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croissante	majorée par M	non majorée
	converge vers ℓ $u_0 \leqslant \ell \leqslant M$	diverge vers $+\infty$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante	minorée par m	non minorée
	converge vers ℓ $m \leqslant \ell \leqslant u_0$	diverge vers $-\infty$

▶ **Pour s'entraîner : ex. 4, 5 et 7.**

3.3. **Suites adjacentes.** Parfois on ne peut pas montrer directement qu'une suite est convergente mais on peut utiliser une suite auxiliaire qui lui serait adjacente. L'intérêt de cette méthode réside dans le fait qu'elle permet de montrer qu'une suite converge sans avoir à calculer sa limite.

Définition : Suites adjacentes.

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si et seulement si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante, et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Méthode : suites adjacentes.

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on prouve que :

- l'une est croissante ;
- l'autre est décroissante ;

- la différence tend vers zéro.

Théorème : Suites adjacentes.
Deux suites adjacentes sont convergentes et de même limite.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 3.3.1. Le théorème portant sur les suites adjacentes donne DEUX résultats : la convergence, puis la limite. Ceci implique qu'un couple de suites adjacentes ne tend pas vers une limite infinie. L'avantage de ce théorème est qu'on obtient la convergence des deux suites. L'inconvénient est que l'on a aucune idée de la valeur de la limite commune !

4. Outils de comparaisons pour les suites.

Si les paragraphes précédents étaient plutôt des rappels de l'an dernier, celui-ci est bien nouveau !

On cherche maintenant à comparer le comportement des suites "à l'infini". Par exemple, les deux suites de termes généraux $u_n = n$ et $v_n = n^2$ sont toutes les deux divergentes. Pourtant, il semble évident que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge "plus vite" que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'objectif de cette fin de chapitre consiste à se donner les moyens précis d'exprimer une telle relation.

Dans le même esprit, les deux suites de termes généraux $a_n = n$ et $b_n = n + 1$ sont aussi toutes les deux divergentes mais on aimerait croire cette fois qu'elles divergent "à la même vitesse", que la constante 1 "n'a aucun poids à l'infini".

Avec le langage que nous allons développer, nous montrerons en effet que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *négligeable* (à l'infini) devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont *équivalentes.*

Une des applications principales de ces notions de négligeabilité et d'équivalence concerne le calcul de limite puisqu'elles nous permettent de repérer, dans une expression complexe, la partie qui est responsable du comportement "dominant" à l'infini.

4.1. Définitions.

Définition : Suites équivalentes ou négligeables.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites, avec $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang. On dit qu'au voisinage de $+\infty$:

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on écrit $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n)$ lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$.
  On dit : " u_n est un petit o de v_n".
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, et on écrit $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, lorsque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.

Remarque 4.1.1.
- $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n)$ si et seulement s'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $u_n = \varepsilon_n v_n$. Dans certains textes, il s'agit en fait de la définition ! Cette manière d'écrire la negligeabilité permet de se passer de l'hypothèse $v_n \neq 0$.
- Les seules suites équivalentes à 0 sont les suites qui sont nulles à partir d'un certain rang.
- Dans cette définition de négligeabilité, rien n'empêche la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diverger vers $-\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de diverger vers $+\infty$, de sorte que la suite négligeable peut en fait être supérieure (à partir d'un certain rang) à la suite dominante.

Exemple 4.1.2. $2 + 2^{-n} \underset{+\infty}{\sim} 2$; $\frac{2n^3+n^2+4n}{n^4} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2}{n}$ et $n^5 + 5n^7 + 5 = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(n^8)$.

Exercice 4.1.3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes vers des limites non nulles. À quelle condition a-t-on $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$?

▶ **Pour s'entraîner : exo 3 et 6.**

Proposition : Caractérisation de l'équivalence.
Pour montrer que deux suites sont équivalentes, on peut montrer que leurs différence est négligeable devant l'une ou l'autre des suites. Précisément, Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. Alors les conditions suivantes sont équivalentes.

- $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
- $u_n - v_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n)$.
- $u_n - v_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(u_n)$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.1.4.
- Cela ne veut pas dire que $u_n - v_n$ converge vers 0. Les suites $u_n = n$ et $v_n = n+1$ forment un contre-exemple.
- Si les deux suites sont nulles à partir d'un certain rang (donc équivalentes), on écrit que
$$0 = \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}(0) \ldots$$
ce qui est vrai.

4.2. **Propriétés.**

Proposition : Opérations sur les équivalents.

1. **Produit :** si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n$ alors $u_n r_n \underset{+\infty}{\sim} v_n s_n$.
   (En particulier, c'est vrai pour $r_n = s_n$).
2. **Quotient :** si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $r_n \underset{+\infty}{\sim} s_n$ (supposées non nulles à partir d'un certain rang), alors $\dfrac{u_n}{r_n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{v_n}{s_n}$.
3. **Élévation à une puissance réelle :** si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ (avec suites positives à partir d'un certain rang), alors, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $u_n^\alpha \underset{+\infty}{\sim} v_n^\alpha$.
4. **Valeur absolue** : si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} |v_n|$.

Démonstration. À compléter. □

Proposition : Propriétés des relations $\mathbf{o}()$ et $\sim$.

1. **Transitivité :** si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ et $v_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$ alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} w_n$.
2. **Terme dominant d'une somme :** si $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n)$, alors $u_n + v_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$. (Dans une somme, on peut négliger les termes... négligeables !)
3. **Passage à l'inverse :** si $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n)$ et si les suites u_n et v_n sont non nulles à partir d'un certain rang, alors : $\frac{1}{v_n} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{u_n}\right)$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.2.1. Un cas particulier important du deuxième point de la proposition précédente affirme que les polynômes sont équivalents à leur monôme de plus haut degré. Soit en effet $(p_n)_n$ la suite définie par
$$p_n = a_N n^N + a_{N-1} n^{N-1} + \cdots + a_1 n + a_0.$$
Alors, pour tout $k < N$,
$$a_k n^k = \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}\left(a_N n^N\right)$$

puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k n^k}{a_N n^N} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_k}{a_N} n^{k-N} = 0$. En appliquant la proposition, on conclut que $p_n \underset{n\to\infty}{\sim} a_N n^N$. Avec le deuxième point de la proposition 4.2, on en déduit un résultat analogue pour les fractions rationnelles (i.e les quotients de polynômes) : elles sont équivalentes au quotient des monômes de plus hauts degrés.

Proposition : Équivalents et limites.

On considère des suites non nulles à partir d'un certain rang. On a alors :

1. $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

2. Soit $\ell \neq 0$. Alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} \ell$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{\ell} = 1$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \ell$.

Démonstration. À compléter. □

Remarque 4.2.2. Les fautes de raisonnement arrivent très vite avec les équivalents. Ce qu'il faut retenir principalement de cette proposition est qu'on peut multiplier ou diviser des équivalents **mais surtout pas** additionner (ou soustraire) les équivalents, ni les composer !

- Si $u_n = n + \frac{1}{n}$, $v_n = -n + 1$. On a $u_n \underset{+\infty}{\sim} n$, $v_n \underset{+\infty}{\sim} -n$ et $u_n + v_n = 1 + \frac{1}{n} \underset{+\infty}{\sim} 1$ alors que $n + (-n) = 0$. En fait, le problème n'est même pas résolu si on considère uniquement des suites non nulles à partir d'un certain rang : en effet $n + 1 \underset{+\infty}{\sim} n + 2$ et d'autre part $-n \underset{+\infty}{\sim} -n$. Si on ajoute ces deux équivalences, on obtient $1 \underset{+\infty}{\sim} 2$, ce qui, bien sûr, est faux. Aucune de ces 6 suites n'est nulle à partir d'un certain rang.
- Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ cela n'implique pas $\ln(u_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(v_n)$. Par exemple, si $u_n = 1$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$ (en utilisant le théorème 4.5).
- De même, si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$ cela n'implique pas $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$. Par exemple, si $u_n = n$ et $v_n = n + 1$.

Exercice 4.2.3. Montrer que $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n - v_n) = 0$. En particulier, il est vrai que si $e^{u_n} \underset{+\infty}{\sim} e^{v_n}$, alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$; c'est la réciproque qui est fausse.

4.3. Applications.

Théorème : Utilisation de la relation d'équivalence.

Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont **de même nature**, c'est-à-dire :

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et dans ce cas elles ont la même limite.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (idem pour $-\infty$).
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite si, et seulement si, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite.

Démonstration. À compléter. □

Théorème : Utilisation de la relation de négligeabilité.

Si $u_n = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(v_n)$ et :

- si la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.
- si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} |v_n| = +\infty$.

Démonstration. À compléter. □

4.4. **Croissances comparées.** Les théorèmes de croissances comparées sont des résultats qui permettent de lever des indéterminations.

Théorème : Croissances comparées.

- "Le logarithme est négligeable devant les puissances" :
  $\boxed{\ln(n) \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(n)}$ ou, plus généralement : $\forall\alpha > 0, \forall\beta > 0,$ $\boxed{(\ln(n))^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\left(n^\beta\right)}$
- "Les puissances sont négligeables devant l'exponentielle" :
  $\boxed{n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(e^n)}$ ou, plus généralement : $\forall\alpha > 0, \forall\beta > 0,$ $\boxed{n^\alpha \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}\left(e^{\beta n}\right)}$
- "L'exponentielle est négligeable devant la factorielle" :
  $\boxed{e^n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(n!)}$ ou, plus généralement : $\forall q > 0,$ $\boxed{q^n \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(n!)}$

Démonstration. Il s'agit en principe d'une reformulation de résultats déjà connus. □

Méthode : croissances comparées.
Quand la croissance comparée n'est pas directe, il faut revenir à une forme exponentielle pour utiliser l'une des formules ci-dessus.

Exemple 4.4.1. Quelle est la limite de $n^2 \times 2^{-n}$?

4.5. **Formes indéterminées.**

Méthode : pour lever les indéterminations.

1. Formes indéterminées du type $\infty - \infty$.
   Pour lever une telle indétermination, on cherche le terme de la somme qui est dominant en $+\infty$, ce qui ramène la limite à trouver à celle d'une expression plus simple. On peut retenir que les polynômes sont équivalents en $+\infty$ à leur monôme de plus haut de degré (voir remarque 4.2.1).
2. Formes indéterminées du type $\dfrac{\infty}{\infty}$.
   On cherche le terme dominant du numérateur et le terme dominant du dénominateur. La limite à trouver se ramène à celle du quotient de ces deux termes dominants. On peut retenir que les fractions rationnelles sont équivalentes en $+\infty$ au quotient de leurs monômes de plus hauts degrés (en s'inspirant de la remarque 4.2.1).
3. Formes indéterminées du type $\frac{0}{0}$.
   La démarche est identique : on ne retient du numérateur et du dénominateur que les termes dominants. Attention cependant, dans ce cas, les termes dominants sont ceux qui tendent le *plus lentement* vers 0.

Exemple 4.5.1.

1. $e^n - n^2 \underset{+\infty}{\sim} e^n$ car $n^2 \underset{+\infty}{=} \mathbf{o}(e^n)$ par croissances comparées, donc :

$$\lim_{n\to+\infty} e^n - n^2 = \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty.$$

2. $\dfrac{e^n - n^2}{3^n - \ln(n)^{10}} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{e^n}{3^n}$ car $n^2 = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(e^n)$ par croissances comparées, et $\ln(n)^{10} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(3^n)$ par croissances comparées, et on fait le quotient des équivalents. Ensuite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n - n^2}{3^n - \ln(n)^{10}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{3^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{e}{3}\right)^n = 0$$

car $-1 < \frac{e}{3} < 1$.

3. $\frac{1+2^{-n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\ln(n)}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{-1}{\ln(n)}} \underset{+\infty}{\sim} -\ln(n)$ car $\lim_{n\to+\infty} 2^{-n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ donc $2^{-n} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1)$, et : $\ln(n) = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(\sqrt{n})$ par croissances comparées, donc $\frac{1}{\sqrt{n}} = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)$, et on fait le quotient des équivalents. Ensuite :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 2^{-n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\ln(n)}} = \lim_{n\to+\infty} -\ln(n) = -\infty.$$

On dispose d'équivalents particuliers pour lever des formes indéterminées spécifiques :

Proposition : Équivalents particuliers.

Soit $\boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ une suite de limite } \textbf{nulle}}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall \alpha \in \mathbb{R}^*, \quad (1+u_n)^\alpha - 1 &\underset{+\infty}{\sim} \alpha u_n \\ \ln(1+u_n) &\underset{+\infty}{\sim} u_n \\ e^{u_n} - 1 &\underset{+\infty}{\sim} u_n \end{aligned}$$

Démonstration. On verra la démonstration de ces résultats plus tard dans le cours, à l'aide de la formule de Taylor. □

Remarque 4.5.2. **C'est faux si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0.**

Par exemple : $\ln(1+n)$ n'est pas équivalent à n au voisinage de $+\infty$, car :

$$\frac{\ln(1+n)}{n} = \frac{\ln\left(n\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)}{n} = \frac{\ln(n)}{n} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} \to_{n\to+\infty} 0$$

en utilisant $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$ par croissances comparées et $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n} = 0$ puisque $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$.

On a donc : $\ln(1+n) = \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(n)$.

Exemple 4.5.3. Donner un équivalent puis la limite de :

1. $x_n = 2^n(\sqrt{1+e^{-n}} - 1)$.

2. $y_n = (n+1)\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$.

3. $z_n = n(e^{\frac{2}{n}} - 1)$.

▶ **Pour s'entraîner : exo 1 et 2.**

5. Sujets d'annales en lien avec ce chapitre.

Remarque 5.0.1. **1.** Nous traiterons certains des sujets suivants en exercices, en travaux dirigés, en colles ou en devoir. Pour les autres, il existe des corrigés que l'on trouve facilement sur Internet. Ces corrigés sont parfois très rapides, n'hésitez pas à venir m'en parler si vous pensez qu'une question mérite des explications supplémentaires.

2. Les sujets de concours sont souvent pensés pour faire appel à plusieurs parties du programme. Dans la liste qui suit figurent les exercices pour lequel il est *nécessaire* de connaître les résultats de ce chapitre. Mais parfois *ce n'est pas suffisant* car d'autres parties du cours sont aussi impliquées. J'indique ces situations avec le symbole $\star$ si l'exercice ne peut être traité avec les connaissances de ce chapitre uniquement.

3. Cette liste n'est pas exhaustive.

1. ECRICOME

- 1995 Exercice 2.
- 1996 Exercice 1.
- 1999 Exercice 1 $\star$.
- 2001 Exercice 2 $\star$.
- 2003 Exercice 2.
- 2004 Exercice 1.
- 2005 Exercice 1 $\star$.
- 2007 Exercice 1 $\star$.
- 2008 Exercice 2 $\star$.
- 2010 Exercice 2 $\star$.
- 2012 Exercice 2 $\star$.
- 2014 Exercice 2.
- 2015 Exercice 1 $\star$.
- 2020 Exercice 2 (la fin).
- 2021 Exercice 2 $\star$.
- 2022 Exercice 2.
- 2023 (sujet 0) Exercice 2 et Exercice 3.

2. EDHEC

- 1997 Exercice 1.
- 2000 Exercice 3.
- 2002 Exercice 3.
- 2003 Exercice 3.
- 2004 Problème $\star$.
- 2008 Exercice 1.
- 2009 Exercice 1.
- 2012 Exercice 1.
- 2016 Exercice 2.
- 2017 Exercice 2 $\star$.
- 2020 Problème $\star$.
- 2022 Exercice 3.

3. EML

- 2001 Exercice 2 $\star$.
- 2002 Exercice 2.
- 2004 Exercice 1.
- 2005 Exercice 2 $\star$.

- 2006 Exercice 2 $\star$.
- 2007 Exercice 2 $\star$.
- 2009 Exercice 1 $\star$.
- 2010 Exercice 2 $\star$ (le début est faisable dès maintenant).
- 2011 Exercice 1 $\star$ (le début est faisable dès maintenant).
- 2016 Exercice 2 $\star$.
- 2017 Exercice 1 $\star$.
- 2018 Exercice 2 $\star$.
- 2019 Exercice 3 (la suite n'est pas vraiment une suite récurrente).

4. **ESCP**
   - 1988 épreuve III Exercice 1 $\star$.
   - 1989 épreuve III Exercice 2.
   - 1990 épreuve III Exercice 2.
   - 1992 épreuve III Exercice 2.
   - 1994 épreuve III Exercice 1 (la suite n'est pas vraiment une suite récurrente, voir la dernière partie de M01).
   - 1996 épreuve III Exercice 2.
   - 1997 épreuve III Exercice 2.
   - 1999 épreuve III Exercice 2.
   - 2000 épreuve III Exercice 2 $\star$.
5. **ESC**
   - 2006 Exercice 2.
   - 2007 Exercice 2.
   - 2009 Exercice 2 $\star$.
6. **ESSEC**
   - 1986 épreuve II Partie I $\star$.
   - 1989 épreuve I Partie I $\star$.
   - 1989 épreuve II Partie II $\star$ (très peu).
   - 1990 épreuve III Exercice 1 (suite récurrente d'ordre 3 mais sans algèbre linéaire).
   - 1993 épreuve II Partie I (suite récurrente d'ordre supérieur sans algèbre linéaire ; d'ailleurs la suite est affine).
   - 1995 épreuve I Exercice 2. 1997 épreuve III Problème 2 $\star$.
   - 2000 épreuve III Exercice 2 $\star$ (les fonctions trigonométriques qui apparaissent dans cet exercice sont maintenant hors programme).
   - 2002 épreuve II Partie I, Partie II et Partie III $\star$.
7. **HEC** Les sujets récents sont très marqués par les probabilités et (plus épisodiquement) l'algèbre linéaire. Si certaines suites numériques apparaissent de temps en temps, leurs études ne constituent jamais le but d'un problème.

Remarque 5.0.2. Les suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur (définie par exemple par ses premiers termes et par $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ seront étudiées dans le cours sur les applications linéaires.