Nom : Note : $\overline{20}$

Question de cours. $\overline{8}$

1. Rappeler la fonction de répartition et une densité de la loi uniforme sur $[0,1]$.
2. Même question avec la loi exponentielle de paramètre λ.
3. Montrer que si X suit la loi uniforme sur $[0,1]$ et que $Y = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-X)$, alors Y suit la loi exponentielle de paramètre λ.
4. En déduire une stratégie pour simuler une loi exponentielle en n'utilisant que la fonction `rd.rand()` de `Python`.
5. Qu'est-ce qu'un problème de Cauchy ?

Exercices. $\overline{12}$

1. Soit $f(t) = \alpha t e^{-t^2}$ si $t \geqslant 0$ et $f(t) = 0$ si $t < 0$.
   - **a.** Calculer α pour que f soit une densité de probabilité.
   - **b.** Soit X une variable aléatoire de densité f. Donner l'expression de $F_X(x)$, puis calculer $P(X < 2)$ et $P(-1 \leqslant X < 3)$.
   - **c.** La variable X admet-elle une espérance ?
   - **d.** Déterminer la loi de $Z = X^2$.
2. On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & 8x(t)+y(t) \\ y'(t) & = & x(t)+8y(t) \end{array}\right. .$$

   - **a.** Résoudre ce système différentiel.
   - **b.** Dessiner les trajectoires des solutions.

Nom : Note : $\overline{20}$

Question de cours. $\overline{8}$

1. Quelle est la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre λ ? En n'utilisant que cette fonction de répartition, retrouver une densité, le support, l'espérance et la variance de la loi.
2. Qu'est-ce qu'un point d'équilibre d'un système différentiel ? Comment trouve-t-on les points d'équilibre ? Citer un résultat du cours sur le comportement des solutions vis-à-vis des points d'équilibre. Illustrer ce résultat par un dessin.

Exercices. $\overline{12}$

1. Soit f définie par : $f(t) = \begin{cases} \dfrac{2}{(1+t)^3} & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}$
   - **a.** Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire Z
   - **b.** Déterminer la fonction de répartition F_Z de Z.
   - **c.** Calculer $P(Z \leqslant 2)$, $P(1 < Z < 5)$, $P_{[Z>1]}(Z < 5)$
   - **d.** Justifier la convergence de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2t}{(1+t)^3}dt$
     La calculer avec le changement de variable $u = t+1$.
   - **e.** Montrer que Z admet une espérance et la déterminer.
   - **f.** Z admet-elle une variance ?
   - **g.** Déterminer la loi de $T = \sqrt{Z}$.
   - **h.** Montrer que T admet une espérance et une variance (on ne demande pas de les calculer).
2. On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & y(t) \\ y'(t) & = & x(t) \end{array}\right. .$$

   - **a.** Résoudre ce système différentiel.
   - **b.** Dessiner les trajectoires des solutions.

Nom : Note : $\overline{20}$

Question de cours. $\overline{6}$

Représenter graphiquement les solutions d'un système différentiel à deux variables pour un matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ diagonalisable (différents cas sont à séparer en fonction du signe des valeurs propres). Justifier brièvement.

Exercices. $\overline{14}$

1. Soit a un nombre réel strictement positif, et f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = ae^{-|x|}$.
   - **a.** Déterminer la valeur du réel a pour que f soit une densité de probabilité.
     On note X la variable aléatoire de densité f.
   - **b.** Déterminer la fonction de répartition de X.
   - **c.** Calculer $P(X \geqslant 0)$, $P(X \geqslant \ln(2))$, $P(-1 < X < 1)$,
     $P_{[X>\ln(2)]}(X < \ln(5))$
   - **d.** Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes et suivant une loi exponentielle de paramètre a. On note $V = \max(X,Y,Z)$.
   - **a.** Déterminer $V(\Omega)$, puis calculer $P(V \leqslant x)$.
   - **b.** Montrer que V est une variable aléatoire à densité, et préciser une densité.
   - **c.** Calculer $E(V)$.
3. On considère le système différentiel

$$\left\{\begin{array}{lcl} x'(t) & = & x(t)-3y(t) \\ y'(t) & = & x(t)-3y(t) \end{array}\right. .$$

   - **a.** Résoudre ce système différentiel.
   - **b.** Dessiner les trajectoires des solutions.