Sujet 1.

Exercice 1 : chaîne de Markov. Dans un certain pays, il ne fait jamais beau 2 jours de suite. Si un jour il fait beau, le lendemain, il peut neiger ou pleuvoir avec autant de chances. Si un jour il pleut ou il neige, il y une chance sur deux qu'il y ait changement de temps le lendemain et s'il y a changement de temps, il y a une chance sur deux pour que ce soit pour du beau temps.

Au premier jour il fait beau.

On note p_n la probabilité qu'il fasse beau au jour n, q_n la probabilité qu'il pleuve et r_n la probabilité qu'il neige.

1. On considère le vecteur $X_n = (p_n, q_n, r_n)$. Montrer que
$$X_{n+1} = X_n \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

2. En notant A la matrice de transition de la chaîne de Markov (la matrice précédente), montrer que 1, $-1/4$ et $1/4$ sont valeurs propres de la matrice.

3. En déduire la proportion de jours de beau temps, de pluie et de neige sur le long terme.

4. Refaire la question précédente dans le cas où la chaîne n'a que deux états : beau temps et mauvais temps.

Exercice 2. On note f la fonction définie, pour tout $x > 0$, par $f(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. Pour tout $n \geqslant 1$, on pose $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

2. En déduire que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

3. Montrer que la série de terme général $u_n = f(n)$ est convergente. Quel point de méthode en (re)-déduisez vous ?

Exercice 3. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de en $x = 1$ de la fonction définie par
$$f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}.$$

Sujet 2.

Exercice 1 : chaîne de Markov. Un triathlon comporte 3 épreuves : la course C, la nage N et le vélo V. Un triathlète prépare son entraînement de la manière suivante.

- Le premier jour, chaque sport a la même probabilité d'être choisi.
- La course étant l'épreuve la plus fatigante, le triathlète ne court jamais 2 jours de suite.
- Si le triathlète à couru un jour donné, il choisira N ou V le jour suivant avec autant de chances.
- S'il nage ou fait du vélo un jour donné, il y a une chance sur deux qu'il change d'activité le lendemain et dans ce cas, une chance sur 2 pour qu'il court.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 (resp. 2, resp. 3) si l'activité C, N ou V a été choisie au $n$ième jour d'entraînement. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$, U_n le vecteur de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$U_n = (P(X_n = 1),\ P(X_n = 2),\ P(X_n = 3))\,.$$

1. **a.** Quelle est la loi de X_1 ? Préciser son espérance et sa variance.

b. Proposer une instruction Python permettant de simuler X_1.

2. Représenter, en justifiant, le diagramme de transition de la chaîne (X_n).

3. Déterminer soigneusement, en citant les résultats utilisés, une matrice A telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on ait

$$U_{n+1} = U_n A.$$

4. Les commandes

```
import numpy.linalg as al

(16*al.matrix_power(A,2)-eye(3,3))*(A-eye(3,3))
```

renvoie

```
  [[0.   0.   0.],
   [0.   0.   0.],
   [0.   0.   0.]]
```

En déduire les valeurs propres possibles de A.

5. Vérifier que les valeurs précédentes sont bien valeurs propres de A, puis exhiber, en rédigeant soigneusement, une matrice D diagonale (dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant) et une matrice P inversible telles que

$$A = PDP^{-1}.$$

6. Inverser P.

7. Calculer explicitement A^n et en déduire la loi de X_n.

Exercice 2. On considère la fonction f définie par

$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,dt.$$

1. Montrer que f est définie sur $]0, +\infty[$, puis que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer f'.

2. En déduire une expression plus simple de f.

3. Retrouver ce résultat grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.

Exercice 3. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable. Que penser de la réciproque ?

Sujet 3

Exercice 1 : chaîne de Markov. Un mobile se déplace aléatoirement dans l'ensemble des sommets d'un triangle. On note ces sommets 1,2 et 3. Les déplacements obéissent à la règle suivante : si à l'instant n, le mobile est sur l'un quelconque des sommets, soit il y reste au moment $n+1$ avec probabilité $2/3$, soit il bouge sur l'un quelconque des sommets adjacents, et ceci avec la même probabilité.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le mobile au moment n. On suppose qu'à l'instant 0, il se trouve sur le sommet numéro 1 (ou encore $X_0 = 1$).

1. Représenter le diagramme de transition de la chaîne de Markov (X_n).

2. En déduire la matrice de transition A.

3. Quelles instructions Python permettent de simuler et d'afficher la trajectoire des n premiers termes de la chaîne, où n est rentré par l'utilisateur ?

4. On pose $B = 6A$. Calculer $B^2 - 9B + 18I_3$.

5. En déduire la diagonalisation de B, puis les puissances de B.

6. Déterminer la loi de X_n et commenter sur la position du mobile à long terme.

Exercice 2. Soit $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite (x_n).

3. Établir que (x_n) converge, et que sa limite ℓ vérifie : $0 < \ell \leqslant 1$.

4. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$.
En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

Exercice 3. Étudions l'erreur commise lorsqu'on remplace une intégrale par une somme de Riemann. Soit f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

1. Trouver un réel M tel que, pour tout $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leqslant M$.

2. Montrer que pour tout entier n non nul,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t) \right| dt.$$

3. En déduire que pour tout entier n non nul,

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt \right| \leqslant \frac{1}{n}.$$

4. Écrire en Python un programme qui calcule et affiche une valeur approchée de $\int_0^1 f(t)dt$ à epsilon près où epsilon est entré au clavier par l'utilisateur.