Exercices. $\frac{\quad}{12}$

Une secrétaire effectue n appels téléphoniques vers n correspondants distincts ($n \geqslant 2$). Pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p appartenant à $]0,1[$ et la probabilité de ne pas l'obtenir est q, avec $q = 1 - p$.

1. Soit X le nombre de correspondants obtenus lors de ces n appels. Quelle est la loi de X ? Calculer l'espérance $E(X)$ et la variance $V(X)$.

2. Après ces n recherches, la secrétaire demande une deuxième fois chacun des $n - X$ correspondants qu'elle n'a pas obtenus la première fois. Soit Y le nombre de correspondants obtenus dans la deuxième série d'appels, et $Z = X + Y$ le nombre total de correspondants obtenus.

a. Compléter le programme pour simuler Z :

```python
import numpy.random as rd

def experience(n,p) :
    x=0
    for k in range(.....) :
        if rd.rand()<p :
            x = .....

    y=0
    for k in range(.....) :
        if rd.rand()<p :
            y = .....
    z = .....
    return z
```

b. Quelles sont les valeurs prises par Z ?

c. Calculer $p_0 = P(Z = 0)$, $p_1 = P(Z = 1)$.
Montrer que $p_1 = npq^{2n-2}(1 + q)$.

d. Calculer $P_{(X=k)}(Y = h)$ pour $k \in [\![0, n]\!]$ et $h \in [\![0, n - k]\!]$.

e. Expliquer pourquoi

$$P(Z = s) = \sum_{k=0}^{s} P\big([X = k] \cap [Y = s - k]\big)$$

f. Calculer $P(Z = s)$, vérifier que $\binom{n}{k}\binom{n-k}{s-k} = \binom{n}{s}\binom{s}{k}$.
En déduire que

$$P(Z = s) = \binom{n}{s}\big(p(1 + q)\big)^{s}(q^2)^{n-s}$$

g. Montrer que $p(1 + q) = 1 - q^2$ et reconnaître la loi suivie par Z

Exercices. $\overline{}$
12

ECRICOME 2004 Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : A ou B. On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas. Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la proba d'une erreur de transmission avec A est de $0,1$, alors que la proba d'erreur de transmission avec B est de $0,05$.

a. Calculer la proba pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

b. Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la proba pour que le serveur utilisé soit le A ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisés par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)

On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la premièer série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

a. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(L_1 = k) = \frac{7}{10}\left(\frac{3}{10}\right)^k + \frac{3}{10}\left(\frac{7}{10}\right)^k$.

b. Vérifier par le calcul que $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} P\left(L_1 = k\right) = 1$.

c. Montrer que L_1 admet une espérance qui vaut $\dfrac{58}{21}$.

d. Déterminer la loi du couple aléatoire $\left(L_1, L_2\right)$.

e. En déduire la loi de L_2.

f. Montrer que L_2 admet une espérance qui vaut 2.

g. Montrer que $E(L_1 L_2) = \dfrac{100}{21}$.

h. En déduire $\mathrm{Cov}(L_1, L_2)$.
L_1 et L_2 sont-elles indépendantes ?

Exercices. $\frac{}{12}$

Une urne contient une boule blanche et une boule noire indiscernables au toucher. On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée. On note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c ($c \neq 0$) boules de la même couleur tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

On considère (pour $i \in [\![1, n]\!]$) $X_i = 1$ si on obtient une boule blanche au i^{e} tirage, et $X_i = 0$ sinon.

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, $Z_p = \sum\limits_{i=1}^{p} X_i$.

1. Que représente la variable Z_p ?

2. Donner la loi de X_1 et son espérance.

3. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).

En déduire la loi de X_2 et son espérance.

4. Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

5. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.

6. Déterminer $Z_p(\Omega)$.

7. Compléter le programme pour simuler $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$:

```
import numpy.random as rd

def tirages(n,c) :
    X = []
    nb_b=1
    nb_n=1
    for k in range(n) :
        if rd.rand()<(nb_b/(nb_n+nb_b)) :
            X.append(.....)
            nb_b=.....
        else :
            X.append(.....)
            nb_n=.....

  return X
```

8. Soit $p \leqslant n - 1$.

a. Déterminer $P_{[Z_p=k]}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.

b. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que : $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}$

c. En déduire que X_p est une variable de Bernoulli de paramètre $\dfrac{1}{2}$

(On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1,. . . ,X_p étant supposées suivre une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, on calculera $E(Z_p)$)