Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{3}$

1. **1.** Énoncer et démontrer tout ce que vous savez sur la loi géométrique.

Simulations Python. $\frac{}{5}$

1. Quelle commande sert à simuler une loi géométrique ?
2. On tire une pièce équilibrée à Pile ou Face jusqu'à l'obtention du premier Pile. Les lancers sont indépendants. Si ce premier Pile est atteint au $k$ième lancer, on pioche alors une boule dans une urne qui contient k boules rouges et $3k^2$ boules vertes. On note X la variable qui prend la valeur 0 si le boule tirée est rouge ou 1 sinon.

   Écrire un programme qui permette de simuler la variable X.

Exercices. $\frac{}{12}$

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont A est la matrice dans la base canonique.

   a. Calculer $(A-I)^2$ puis montrer que $(A-I)^2(A-3I) = 0$.

   b. En déduire les valeurs propres de A.

   c. A est-elle diagonalisable ?

   d. Montrer que $u_1 = (1,0,-1)$, $u_2 = (1,0,1)$, $u_3 = (1,2,-1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$.

   e. Écrire la matrice T de f dans cette base. Quelle relation y a-t-il entre A et T ?
2. Vrai ou faix : la somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.

Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{3}$

1. Énoncer et démontrer tout ce que vous savez sur la loi de Poisson.

Simulations Python. $\frac{}{5}$

1. Quelle commande sert à simuler une loi binomiale ?
2. On tire n fois indépendamment une pièce équilibrée à pile ou face. On note k le nombre de "face" obtenus. Puis on pioche une boule dans une urne qui contient k boules rouges et 1 boule verte. On note X la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si la boule piochée est rouge et 1 sinon.

   Écrire un programme qui permette de simuler la variable aléatoire X.

Exercices. $\frac{}{12}$

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnée par $u_0 = 6$, $u_1 = -4$, $u_2 = 0$ et, $\forall n \geqslant 0$, $u_{n+3} = u_{n+2} + 4u_{n+1} - 4u_n$.

   Soit $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix}$.

   a. Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.

   b. En déduire une expression de X_n en fonction de A, n et X_0.

   c. Déterminer une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $A = PDP^{-1}$.

   d. En déduire le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. On suppose que le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 1$ est un polynôme annulateur d'un endomorphisme f et on suppose de plus que f n'est pas l'endomorphisme identité. Montrer que f n'est pas diagonalisable.

Nom : Note : $\frac{}{20}$

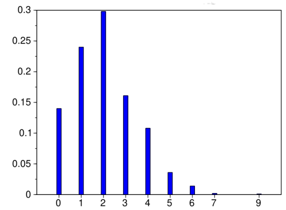
Question de cours. $\frac{}{3}$

1. Énoncer et démontrer tout ce que vous savez sur la loi binomiale.

   Dans le calcul de l'espérance, on pourra être amené à montrer que
   - *Pour tout entier $k \geqslant 1$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.*
   - *Pour tout entier $k \geqslant 2$, $k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\binom{n-1}{k-1}$*

Simulations Python. $\frac{}{5}$

1. Comment peut-on simuler une loi de Poisson.
2. Écrire un programme qui simule 100 fois la lois de Poisson de paramètre `a` et affiche les fréquences des résultats obtenus dans un diagramme en bâtons.
3. Le programme précédent a fait apparaître ce diagramme.

   Quelle conjecture peut-on faire sur le paramètre de la loi.

Exercices. $\frac{}{12}$

1. Soit f défini pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $\big(f(P)\big)(x) = (x+1)P'(x+1)$.

   a. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.

   b. Déterminer la matrice de f dans la base canonique

   c. Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés.

   d. f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?

   e. f est-il diagonalisable ? Si oui, donner une base $\mathcal{B}$ dans laquelle la matrice de f est diagonale, et la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$.
2. Montrer que si A est diagonalisable, alors A^2 est diagonalisable. Que penser de la réciproque ?