Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{6}$

1. Qu'est-ce qu'une valeur propre ?
2. Puissances de matrices semblables (énoncé et preuve)

Exercices. $\frac{}{14}$

1. On considère la fonction f définie par
$$f(x) = \int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt.$$
   - **a.** Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$, puis que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer f'.
   - **b.** En déduire une expression plus simple de f.
   - **c.** Retrouver ce résultat grâce au changement de variable $u = \frac{1}{t}$.
2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.
   - **a.** Calculer A^2 en fonction de A.
   - **b.** En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
   - **c.** A est-elle diagonalisable ?

Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{6}$

1. Qu'est-ce qu'un vecteur propre ?
2. Expliquer avec le plus de détails possible les méthodes qui servent à calculer les puissances d'une matrice.

Exercices. $\frac{}{14}$

1. Étudions l'erreur commise lorsqu'on remplace une intégrale par une somme de Riemann. Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
   - **a.** Trouver un réel M tel que, pour tout $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leqslant M$.
   - **b.** Montrer que pour tout entier n non nul,
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(t)\right| dt.$$
   - **c.** En déduire que pour tout entier n non nul,
$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 f(t)dt\right| \leqslant \frac{1}{n}.$$
   - **d.** Écrire en Python un programme qui calcule et affiche une valeur approchée de $\int_0^1 f(t)dt$ à epsilon près où epsilon est entré au clavier par l'utilisateur.
2. Les matrices $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ? diagonalisables ? (sans calculs)

Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{6}$

1. Qu'appelle-t-on deux matrices semblables ? Quel est le lien avec l'endomorphisme associé à ces matrices ?
2. Qu'est-ce qu'une matrice diagonalisable ? Donner les différentes caractérisations de la diagonalisabilité, puis un exemple de matrice diagonalisable et un contre-exemple.

Exercices. $\frac{}{14}$

1. **a.** Montrer que l'intégrale
$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt$$
existe.
   - **b.** Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n.
   - **c.** En déduire une valeur de I_n en fonction de n.
2. Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = (4x-6y, -2x)$. On admet que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$.
   - **a.** Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
   - **b.** Montrer que f est diagonalisable, et donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice de f a pour forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$, avec $\lambda < \mu$.
   - **c.** f est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^2$?