Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{8}$

1. Montrer que l'image du vecteur nul par une application linéaire est le vecteur nul. Commenter chacune des étapes du raisonnement.
2. Discuter selon la valeur de α la convergence et la valeur des intégrales
$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}.$$

Applications linéaires. $\frac{}{8}$

1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par
$$f(x,y,z) = (-3x-y+z, 8x+3y-2z, -4x-y+2z).$$
Montrer que f est linéaire, trouver une base de son image et de son noyau. L'application est-elle surjective ? injective ?
2. Soit A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$. On suppose que pour tout $X \in \mathbb{R}^m$, $AX = BX$. En utilisant uniquement du calcul matriciel, montrer que $A = B$.
On pourra commencer par les petites valeurs de m et n si besoin.

Intégration. $\frac{}{4}$

1. Calculer la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où
$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}.$$
2. Calculer
$$\int_0^{\ln(2)} e^x \left(2e^x - 1\right)^2 dx \quad \text{et} \quad \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$
3. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)}$?

Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{8}$

1. Comment définit-on la dimension d'un espace vectoriel ? Pour présenter cette définition, on pourra être amené à expliquer ce qu'est une base, une famille libre, génératrice et/ou à citer un résultat du cours sur le cardinal des bases : plus il y a de détails, plus le colleur sera content
2. Montrer que la composée de deux applications linéaires est linéaire.

Applications linéaires. $\frac{}{8}$

1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par
$$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z).$$
Montrer que f est linéaire, trouver une base de son image et de son noyau. L'application est-elle surjective ? injective ?
2. Soit V un espace vectoriel et f une application linéaire. On suppose que $\dim(V) = 7$ et que $f \circ f = 0$. Montrer que $\operatorname{rang}(f) \leqslant 3$.

Intégration. $\frac{}{4}$

1. Calculer la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ où
$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{k}{n}}.$$
2. Calculer
$$\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_1^4 e^{\sqrt{x}} dx.$$
3. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$?

Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{8}$

1. Discuter selon les valeurs de λ la convergence puis la valeur de l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt.$$
2. Montrer que l'image et le noyau d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.
3. Montrer qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit au vecteur nul.

Applications linéaires. $\frac{}{8}$

1. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ définie par
$$f(x,y,z) = (-2x+2z, y-x, 3z, -4x+4z).$$
Montrer que f est linéaire, trouver une base de son image et de son noyau. L'application est-elle surjective ? injective ?
2. Soit A une matrice carrée telle que $A^2 = A$. Peut-on en déduire que $A = 0$ ou $A = I_n$?

Intégration. $\frac{}{4}$

1. Calculer
$$\int_0^1 x e^{-x^2} dx \quad \text{et} \quad \int_1^e x^2 \ln(x) dx.$$
2. Quelle est la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{1+e^e}}$?