Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{6}$

1. Donner la définition d'une série convergente.
2. Expliquer comment marche l'algorithme de la dichotomie pour la recherche d'une solution à l'équation $f(x) = 0$. Écrire ensuite un programme Python qui implémente cet algorithme.

Exercices. $\frac{}{14}$

1. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes.

a. $\sum_{n \geqslant 0} \frac{n}{n!}$. **b.** $\sum_{k \geqslant 1} k(k-1) \frac{2^k}{5^{k+1}}$.

2. Quelle est la nature des séries ?

a. $\sum \frac{1}{n^2 \ln n}$. **b.** $\sum \frac{1}{1+n\sqrt{n}}$.

3. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{2x+3}$.
   a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $3 \leqslant u_n \leqslant 5$.
   b. Étudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. En déduire qu'elle est convergente.
   c. Calculer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
   d. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - u_{n+1}$. Étudier la nature de la série $\sum v_k$.
4. Soit X une variable aléatoire dont la loi est donnée par
$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{a}{3^{k+1}},$$
pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   a. Calculer la valeur du réel a.
   b. Montrer que X possède une espérance et la calculer.
5. Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $x = 2$ de la fonction définie par
$$f(x) = x^4 + 2x^3 + 5.$$

Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{6}$

1. Donner la définition d'une série absolument convergente.
2. Montrer qu'une fonction est dérivable si et seulement si elle admet un développement limité à l'ordre 1.

Exercices. $\frac{}{14}$

1. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes.

a. $\sum_{k \geqslant 1} \frac{k-1}{(k-1)!}$. **b.** $\sum_{k \geqslant 0} \frac{k^2}{2^k}$.

2. Quelle est la nature des séries ?

a. $\sum \frac{n}{2n^3+1}$. **b.** $\sum \frac{1}{1+\sqrt{n}}$.

3. **a.** Déterminer a et b tels que
$$\frac{1}{k(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+2}$$
   b. Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{k(k+2)}$.
4. Pour $n \geqslant 1$, on pose
$$u_n = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{3k+1}{3}.$$
   a. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n et en déduire que $u_n \geqslant \frac{1}{3n}$.
   b. Quelle est la nature de la série $\sum u_n$.
5. Écrire le développement limité à l'ordre 2 de en $x = 1$ de la fonction définie par
$$f(x) = \frac{\ln x}{(x+1)^2}.$$

Nom : Note : $\frac{}{20}$

Question de cours. $\frac{}{6}$

1. Qu'est-ce qu'un développement limité à l'ordre 1 pour une fonction ?
2. Énoncer et démontrer le critère de comparaison par majoration pour les séries à termes positifs.

Exercices. $\frac{}{14}$

1. Montrer que les séries suivantes sont convergentes et calculer leurs sommes.

a. $\sum_{k \geqslant 0} \frac{k^2-k}{k!}$. **b.** $\sum_{k \geqslant 0} \frac{k^2}{3^k}$.

2. Quelle est la nature des séries ?

a. $\sum \frac{\ln n}{n^3}$. **b.** $\sum \frac{n - \ln n}{n^2+1}$.

3. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_n = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2} + k\right)}.$$
   a. Montrer que $u_{n+1} = u_n \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}+1}$ pour tout n.
   b. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone et convergente. On note ℓ sa limite.
   c. On considère la série de terme général $v_k = u_k - u_{k+1}$. Montrer que cette série converge.
   d. On suppose ici que $\ell \neq 0$.
      (i) Montrer que $u_k - u_{k+1} \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{\ell}{2k}$.
      (ii) Déduire de ce qui précède que $\ell = 0$.
   e. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $u_k \geqslant \frac{1}{k+\frac{1}{2}}$. En déduire la nature de la série de terme général u_k.
4. Écrire le développement limité à l'ordre 2 en $x = 1$ de la fonction définie par
$$f(x) = x^2 e^x.$$