Nom : Note : $\overline{20}$

Question de cours. $\overline{6}$

- Donner la définition d'un intervalle stable.
- Énoncer le théorème des encadrements.
- Démontrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ et si $x_n \underset{n\to\infty}{\sim} y_n$,
$$u_n x_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n y_n.$$

Exercices. $\overline{14}$

1. Donner un équivalent et la limite des suites suivantes :
$$a_n = \frac{n^2 - 3^n}{2^n - n^3}, \quad b_n = \frac{n}{2}\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right).$$

2. Une compagnie de trains subit des retards pendant une journée : si un train est en retard, le train suivant sera en retard avec la probabilité 0,85, et si un train est à l'heure, le train suivant sera en retard avec la probabilité 0,25.

Le premier train part à l'heure. Calculer la probabilité que le n^e train soit en retard.

On notera R_n : "le n^e train est en retard", et on commencera par exprimer $P(R_{n+1})$ en fonction de $P(R_n)$.

3. a. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, montrer que l'équation
$$x + \ln(x) = n$$
possède une unique solution, notée x_n, dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer x_1.

b. Étudier la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

c. Montrer que $\forall n \geqslant 1$, $n - \ln(n) \leqslant x_n \leqslant n$.

d. En déduire un équivalent de x_n, puis sa limite.

Nom : Note : $\overline{20}$

Question de cours. $\overline{6}$

- Donner la définition d'une suite négligeable devant une autre
- Énoncer sans preuve le théorème des suites adjacentes.
- Démontrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$ si et seulement si
$$u_n - v_n = \underset{n\to\infty}{\mathbf{o}}(v_n).$$

Exercices. $\overline{14}$

1. Donner un équivalent et la limite des suites :
$$a_n = \frac{\ln(n^2) - (\ln(n))^2}{\sqrt{n}+2}, \quad b_n = (5n - 2\sqrt{n})\left(\sqrt{1-e^{-n}} - 1\right)$$

2. On considère les deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :
$$\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} x_{n+1} = -2x_n + y_n \\ y_{n+1} = 2x_n - 3y_n \end{cases}$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n$.

b. En déduire une expression de x_n puis de y_n en fonction de n.

c. Les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles convergentes ?

3. (ESCP) Soit $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. On définit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a.(i) Montrer que f possède un unique point fixe $\lambda \in [0;1]$.

(ii) Montrer que $[0;1]$ est stable par f.

(iii) Montrer que $\forall x \in [0;1]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$.

b.(i) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0;1]$.

(ii) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \lambda| \leqslant \frac{1}{\sqrt{e}}|u_n - \lambda|.$$

(iii) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.

Nom : Note : $\overline{20}$

Question de cours. $\overline{6}$

- Qu'est-ce qu'un point fixe pour une application f ?
- Énoncer le théorème du point fixe.
- Montrer que si $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} v_n$, alors $(u_n)^\alpha \underset{n\to\infty}{\sim} (v_n)^\alpha$ pour tout réel α.

Exercices. $\overline{14}$

1. Donner un équivalent et la limite des suites suivantes :
$$a_n = \frac{0,5^n - n^{0,5}}{2\ln(n) - 3n + 1}, \quad b_n = (\sqrt{n} - n)\left(e^{\frac{-3}{n}} - 1\right)$$

2. On considère la suite définie par : $u_1 = 2$, $u_2 = 3$ et, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$.

a. Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

b. Étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3. Soit la suite u définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. On pose $f(x) = \sqrt{x+1}$.

a.

(i) Montrer que $[0,2]$ est stable par f et que $\forall x \in [0,2], \quad |f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}$

(ii) Déterminer les points fixes de f. On note r l'unique point fixe tel que $r \in [0,2]$.

b.

(i) Montrer que $\forall\ n \geqslant 0, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 2$.

(ii) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_{n+1} - r| \leqslant \frac{|u_n - r|}{2}$ puis que $|u_n - r| \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

(iii) Déterminer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Questions bonus.

1. Toutes les démonstrations du programme de colles 01 avec le symbole *.

2. Soit $f_n(x) = x^n + x - 1$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution $x_n \in]0, 1[$.

b. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_{n+1}(x_n) < f_{n+1}(x_{n+1})$. En déduire la monotonie de la suite (x_n).

c. Établir que (x_n) converge, et que sa limite ℓ vérifie : $0 < \ell \leqslant 1$.

d. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \leqslant \ell$.
En procédant par l'absurde, montrer que $\ell = 1$.

3. Montrer que la suite définie par $x_0 = 1$ et

$$x_{n+1} = \frac{x_n}{1 + n(x_n)^2}$$

converge vers 0.