Partie 1

1. Par convexité de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, la comparaison avec la tangente en 0 donne : $\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^t \geqslant 1+t}$.

   En composant par la fonction ln (pourvu que $1+t>0$ donc $t>-1$), on obtient immédiatement : $\boxed{\forall t>-1,\ \ln(1+t) \leqslant t}$.

2. On définit la fonction f sur $[0,1]$ par $f(t) = (1+t)\mathrm{e}^{-t} - t$.

   (a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ comme produit et somme de fonctions qui le sont. De plus, pour tout réel $t \in [0,1]$, on a :
   $$f'(t) = 1\mathrm{e}^{-t} + (1+t)(-\mathrm{e}^{-t}) - 1 = -t\mathrm{e}^{-t} - 1 < 0$$
   donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0,1]}$. Or :
   $$f(0) = (1+0)\mathrm{e}^{-0} - 0 = 1 > 0 \qquad \text{et} \qquad f(1) = (1+1)\mathrm{e}^{-1} - 1 = \frac{2}{\mathrm{e}} - 1 = \frac{2-\mathrm{e}}{\mathrm{e}} < 0$$
   puisque $\mathrm{e} > 2$. La fonction f est continue et strictement décroissante sur $[0,1]$ donc elle établit une bijection de $[0,1]$ dans $[f(1), f(0)] = \left[2\mathrm{e}^{-1}-1, 1\right]$. Comme $f(1) < 0 < f(0)$ alors : $\boxed{\exists! \alpha \in]0,1[\ /\ f(\alpha) = 0}$ et la stricte décroissance assure que : $\boxed{f(t) > 0 \iff t < \alpha}$.

   (b) Calcul approché de α par dichotomie ou de manière itérative, dans les deux cas le réel contenu dans a est une valeur approchée de α à 10^{-3} près, par défaut dans le premier cas et par excès dans le second :

```
def f(t) :
    return (1+t)*np.exp(-t)-t
# dichotomie (indépendant du sens de variation de f)
a=0 ; b=1 ; eps=1e-3
while abs(a-b)>eps :
    c=(a+b)/2
    if f(a)*f(c)>0 : a=c
    else : b=c
# itératif (tient compte du sens de variation de f)
a=0 ; eps=1e-3
while f(a)>0 :
    a=a+eps
```

   (c) Étudions la fonction $g\colon t \mapsto 1 + 2t - \mathrm{e}^t$ sur $[0,1]$. Elle y est bien de classe $\mathcal{C}^1$ et on a :
   $$g'(t) = 2 - \mathrm{e}^t > 0 \iff \mathrm{e}^t < 2 \iff t < \ln(2)$$
   Ainsi, g est croissante sur $[0, \ln(2)]$ et décroissante sur $[\ln(2), 1]$. Comme $g(0) = 0 \geqslant 0$ et comme $g(1) = 3 - \mathrm{e} > 0$, on en déduit que la fonction g est positive sur $[0,1]$ donc : $\boxed{\forall t \in [0,1],\ \mathrm{e}^t \leqslant 1+2t}$.
   Alors :
   $$\mathrm{e}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \leqslant 1 + 2\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \iff \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} \geqslant \frac{1}{1+\sqrt{2}}$$
   $$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{e}^{-\frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \geqslant \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{1+\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} = 0 = f(\alpha)$$
   Par décroissance de f, on conclut que : $\boxed{\alpha \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

3. (a) On remarque que $\dfrac{p^i}{i!} = \dfrac{p}{i} \times \dfrac{p^{i-1}}{(i-1)!}$ pour tout $i \in \mathbb{N}^*$. On obtient alors la fonction :

```
def minimum(x,p) :
    i=0 ; u=np.exp(-p) ; S=u
    while x>S :
        i=i+1 ; u=p/i*u ; S=S+u
    return i
```

   Simulation de la variable aléatoire Y :

```
def simulY(p) :
    return minimum(rd.random(),p)
```

   (b) Par définition de la variable aléatoire Y, on a : $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on a alors :
   $$[Y = k] = \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} < U \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right]$$

Comme $\mathbb{P}(U \leqslant x) = F_U(x) = x$ lorsque $0 \leqslant x < 1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=k) &= \mathbb{P}\left(U \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right) - \mathbb{P}\left(U \leqslant \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right)\\ &= \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} - \sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} = \frac{p^k}{k!}\mathrm{e}^{-p}\end{aligned}$$

et lorsque $k=0$:

$$[Y=0] = \left[U \leqslant \mathrm{e}^{-p}\right] \qquad \text{donc} \qquad \mathbb{P}(Y=0) = \mathbb{P}\left(U \leqslant \mathrm{e}^{-p}\right) = \mathrm{e}^{-p} = \frac{p^0}{0!}\mathrm{e}^{-p}$$

Ainsi : $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\mathbb{P}(Y=k) = \dfrac{p^k}{k!}\mathrm{e}^{-p}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ donc $\boxed{Y \hookrightarrow \mathcal{P}(p)}$.

(c) Soit $k \geqslant 2$. Alors :

$$[Y=k] = \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} < U \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right] \subset \left[\sum_{i=0}^{1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} < U \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right]$$

Or :

$$\sum_{i=0}^{1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} = \mathrm{e}^{-p}(1+p) = f(p) + p = \beta + p$$

donc :

$$\left[\sum_{i=0}^{1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} < U \leqslant \sum_{i=0}^{k} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right] \subset [U > \beta + p] \subset \left[\mathbf{1}_{[\beta < U \leqslant \beta+p]} = 0\right] = [X=0]$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \geqslant 2,\ [Y=k] \subset [X=0]}$.

On en déduit que : $[X=0] \cap [Y=k] = [Y=k]$ donc : $\boxed{\forall k \geqslant 2,\ \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=k]) = \dfrac{p^k}{k!}\mathrm{e}^{-p}}$.

(d) On a :

$$\begin{aligned}[X=0] \cap [Y=1] &= \overline{[\beta < U \leqslant \beta+p]} \cap \left[\sum_{i=0}^{0} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p} < U \leqslant \sum_{i=0}^{1} \frac{p^i}{i!}\mathrm{e}^{-p}\right]\\ &= \overline{[\beta < U \leqslant \beta+p]} \cap \left[\mathrm{e}^{-p} < U \leqslant \beta + p\right]\end{aligned}$$

donc : $\boxed{[X=0] \cap [Y=1] = \varnothing}$.

Alors, par formule des probabilités totales avec le système complet $([X=0], [X=1])$:

$$\mathbb{P}(Y=1) = \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=1]) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) = \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1])$$

donc : $\boxed{\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=1]) = p\mathrm{e}^{-p}}$.

Par formule des probabilités totales avec le système complet $([Y=k])_{k \in \mathbb{N}}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=0) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=k]) = \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(Y=k)\\ 1 - [(\beta+p) - \beta] &= \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) + 1 - \mathbb{P}(Y \leqslant 1) = \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) + 1 - \left[(1+p)\mathrm{e}^{-p}\right]\\ 1 - p &= \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) + 1 - (\beta + p)\end{aligned}$$

donc : $\boxed{\mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) = \beta}$.

À nouveau par formule des probabilités totales avec le système complet $([X=0], [X=1])$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y=0) &= \mathbb{P}([X=0] \cap [Y=0]) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=0])\\ \mathrm{e}^{-p} &= \beta + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=0]) = (1+p)\mathrm{e}^{-p} - p + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=0])\end{aligned}$$

donc : $\boxed{\mathbb{P}([X=1] \cap [Y=0]) = p(1 - \mathrm{e}^{-p})}$.

(e) Toujours par formule des probabilités totales avec le système complet $([X=0], [X=1])$:

$$\begin{aligned}\boxed{\mathbb{P}(X \neq Y)} &= \mathbb{P}([X=0] \cap [Y \neq X]) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y \neq X]) = \mathbb{P}(Y \geqslant 2) + \mathbb{P}([X=1] \cap [Y=0])\\ &= \left[1 - (1+p)\mathrm{e}^{-p}\right] + p\left(1 - \mathrm{e}^{-p}\right) = \boxed{1 + p - (1+2p)\mathrm{e}^{-p}}\end{aligned}$$

Comme $\mathrm{e}^{-p} \geqslant 1 - p$ alors $-(1+2p)\mathrm{e}^{-p} \geqslant (p-1)(1+2p)$ donc :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant 1 + p + (p-1)(1+2p) = 1 + p + p + 2p^2 - 1 - 2p$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant 2p^2}$.

4. (a) Par définition de la variable aléatoire T, l'événement $[T \geqslant 1]$ est réalisé si et seulement si l'une au moins des variables aléatoires $\mathbf{1}_{B_i}$ prend la valeur 1 donc si et seulement si l'un au moins des événements B_i est réalisé. Ainsi :

$$[T \geqslant 1] = \bigcup_{i=1}^{k} B_i \qquad \text{donc} \qquad \boxed{\mathbb{P}(T \geqslant 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right)}$$

(b) Inégalité de Markov : $\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}(T \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbb{E}(T)}{\varepsilon}}$ lorsque $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+$ et T admet une espérance.

Ici, $T(\Omega) \subset [\![0,n]\!] \subset \mathbb{R}_+$ et T admet une espérance par linéarité et :

$$\mathbb{E}(T) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{B_i}) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)$$

On applique l'inégalité de Markov avec $\varepsilon = 1 > 0$ ce qui donne directement l'inégalité demandée.

Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall (B_1, \dots, B_k) \in \mathcal{A}^k,\ \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{k} B_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(B_i)}$.

5. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire :

$$0 \leqslant |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leqslant \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(Y = k)$$

Par combinaison linéaire de séries convergentes, la série $\sum_{k \geqslant 0} [\mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(Y = k)]$ est convergente. Par théorème de comparaison, on en déduit que la série $\boxed{\sum_{k \geqslant 0} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \text{ est convergente}}$.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathbb{P}(X = k) \geqslant \mathbb{P}(Y = k)$. Alors :

$$\begin{aligned} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| &= \mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k) \\ &= \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq k]) + \underbrace{\mathbb{P}([X = k] \cap [Y = k]) - \mathbb{P}(Y = k)}_{\leqslant 0} \end{aligned}$$

donc $\boxed{\mathbb{P}(X = k) \geqslant \mathbb{P}(Y = k) \implies |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leqslant \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq k])}$.

(c) Soit $k \in \mathbb{N}$. De même que précédemment (on renverse les rôles de X et Y) :

$$\mathbb{P}(Y = k) \geqslant \mathbb{P}(X = k) \implies |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leqslant \mathbb{P}([X \neq k] \cap [Y = k])$$

Ainsi, dans les deux cas : $\boxed{|\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leqslant \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq k]) + \mathbb{P}([X \neq k] \cap [Y = k])}$.

(d) Soit $n \geqslant 0$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq k]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X \neq k] \cap [Y = k]) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq X]) + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X \neq Y] \cap [Y = k]) \end{aligned}$$

Or, par formule des probabilités totales avec le système complet $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$ (puis $([Y = k])_{k \in \mathbb{N}}$), on obtient :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq X]) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X = k] \cap [Y \neq k])$$

et :

$$\mathbb{P}(X \neq Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}([X \neq Y] \cap [Y = k]) \geqslant \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X \neq Y] \cap [Y = k])$$

donc :

$$\sum_{k=0}^{n} |\mathbb{P}(X = k) - \mathbb{P}(Y = k)| \leqslant \mathbb{P}(X \neq Y) + \mathbb{P}(X \neq Y) = 2d(X, Y)$$

Par passage à la limite lorsque $n \to +\infty$ (il y a bien convergence), on conclut que : $\boxed{\delta(X, Y) \leqslant 2d(X, Y) \leqslant 2}$ (puisque $d(X, Y) = \mathbb{P}(X \neq Y) \leqslant 1$).

Partie 2

6. Supposons l'existence de $k_i \in [\![1, n]\!]$ tel que $p_i \geqslant \alpha$. D'après la question 2c, on en déduit que :

$$p_i^2 \geqslant \alpha^2 \geqslant \frac{1}{2} \qquad \text{donc} \qquad 4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 \geqslant 4p_i^2 \geqslant 2 \geqslant \delta(S_n T_n)$$

(grâce à donc la question 5d) ce qui permet de conclure : $\boxed{\text{L'inégalité } (LC) \text{ est vérifiée dans ce cas}}$.

7. Les variables aléatoires $U_1, \ldots, U_n$ sont indépendantes et chaque X_i (respectivement Y_i) est construite exclusivement à partir de U_i donc $\boxed{X_1, \ldots, X_n \text{ (respectivement } Y_1, \ldots, Y_n\text{) sont indépendantes}}$.
Pour être un peu plus précis :

$$[X_i = 1] = [\beta_i < U_i \leqslant \beta_i + p_i]$$

donc les événements $[X_i = 1]$ sont indépendants et il en va de même si on remplace certains de ces événement par leur contraire qui est $[X_i = 0]$. Ainsi, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes puisque l'on a traité toutes les valeurs possibles des variables aléatoires X_i. Le raisonnement final est un peu plus sophistiqué pour les Y_i qui prennent une infinité de valeurs.

8. On a : $Y_k \hookrightarrow \mathcal{P}(p_k)$ d'après la partie 1 (puisque $p_k < \alpha$). Par indépendance des Y_k et stabilité des lois de Poisson par la somme dans ce cas, on en déduit que : $\boxed{T_n = Y_1 + \cdots + Y_n \hookrightarrow \mathcal{P}(p_1 + \cdots + p_n) = \mathcal{P}(\lambda)}$.
Dans le cas où $p_k = \lambda/n$ pour tout k, on a : $\mathbb{P}(X_k = 1) = \mathbb{P}(\beta_k < U_k \leqslant \beta_k + p_k) = p_k$ donc $X_k \hookrightarrow \mathcal{B}(1, \lambda/n)$. Par théorème de stabilité par la somme des lois binomiale à paramètre p égal et puisque les X_k sont indépendantes, on conclut que : $\boxed{S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)}$.
D'après le cours, on sait que dans ce cas, on a : <u>$(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ</u>.
Remarque : Le problème est que λ dépend de n, il ne peut fixé sans changer la valeurs des paramètres $p_1, \ldots, p_n$ lorsque qu'on fait varier n … Ou alors il faut comprendre que les p_k sont tous égaux à p (pour tout k) mais alors $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et dans ce cas il n'y a pas convergence en loi de la suite …

9. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il est évident que $\displaystyle\bigcap_{k=1}^{n} [X_k = Y_k] \subset \left[S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k = T_n\right]$.

   Par passage aux événements contraires, on conclut : $\boxed{[S_n \neq T_n] \subset \displaystyle\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]}$.

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On applique les questions 5d puis puis 9a puis 4b et enfin 3e :

$$\delta(S_n, Y_n) \leqslant 2d(X_n, Y_n) = 2\,\mathbb{P}(S_n \neq T_n) \leqslant 2\,\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} [X_k \neq Y_k]\right) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k \neq Y_k) \leqslant 2\sum_{k=1}^{n} 2p_k^2$$

   Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \delta(S_n, Y_n) \leqslant 4\displaystyle\sum_{k=1}^{n} p_k^2}$

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $p_k = \lambda/n$. D'après la question 8 : $S_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \lambda/n)$ et $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ donc :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \right| = \sum_{k=0}^{n} |\mathbb{P}(S_n = k) - \mathbb{P}(T_n = k)| \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} |\mathbb{P}(S_n = k) - \mathbb{P}(T_n = k)|$$

puisque $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} |\mathbb{P}(S_n = k) - \mathbb{P}(T_n = k)| = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathbb{P}(T_n = k)$ est bien une somme d'une série convergence. Alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \right| \leqslant \delta(S_n, T_n) \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} p_k^2 = 4\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda^2}{n^2}$$

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left| \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} - \frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda} \right| \leqslant \frac{4\lambda^2}{n}}$.

11. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Dans cette situation : $p_i = \dfrac{1}{n+i}$ donc $T_n \hookrightarrow \mathcal{P}(s_n)$ d'où :

$$\left| \mathbb{P}(S_n = k) - \frac{s_n^k}{k!}\mathrm{e}^{-s_n} \right| = |\mathbb{P}(S_n = k) - \mathbb{P}(T_n = k)| \leqslant \delta(S_n, T_n) \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leqslant 4\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2}$$

   Conclusion : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N},\ \left| \mathbb{P}(S_n = k) - \dfrac{s_n^k}{k!}\mathrm{e}^{-s_n} \right| \leqslant \dfrac{4}{n}}$.

(b) Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Par décroissance de la fonction continue $t \mapsto \dfrac{1}{n+t}$ sur $[k, k+1]$, on a :

$$\forall t \in [k, k+1]\,,\ \frac{1}{n+k+1} \leqslant \frac{1}{n+t} \leqslant \frac{1}{n+k}$$

donc :

$$\frac{1}{n+k+1} = \int_k^{k+1} \frac{1}{n+k+1}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{n+k}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+k}$$

donc pour $k \geqslant 1$ et en remplaçant k par $k-1$:

$$\frac{1}{n+k} \leqslant \int_{k-1}^{k+1} \frac{1}{n+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+k-1}$$

Conclusion : $\boxed{\forall k \in [\![1, n]\!],\ \int_k^{k+1} \frac{1}{n+t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{1}{n+t}\,\mathrm{d}t}$.

(c) Par sommation de cette double inégalité pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on obtient avec la relation de Chasles :

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{n+t}\,\mathrm{d}t \leqslant s_n \leqslant \int_0^{n} \frac{1}{n+t}\,\mathrm{d}t$$

On calcule les intégrale avec la primitive $t \mapsto \ln(n+t)$:

$$\ln(2n+1) - \ln(n+1) \leqslant s_n \leqslant \ln(2n) - \ln(n)$$

$$\boxed{\ln\left(2 - \frac{1}{n+1}\right) \leqslant s_n \leqslant \ln(2)}$$

et par théorème d'encadrement, on conclut que : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \ln(2)}$.

(d) Les questions 11c et 11a donnent alors pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$0 \leqslant \lim_{n\to+\infty} \left|\mathbb{P}(S_n = k) - \frac{(\ln(2))^k}{k!}\mathrm{e}^{-\ln(2)}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\mathbb{P}(S_n = k) - \frac{s_n^k}{k!}\mathrm{e}^{-s_n}\right| \leqslant \lim_{n\to+\infty} \frac{4}{n} = 0$$

Ainsi : $\forall k \in \mathbb{N},\ \lim\limits_{n\to+\infty} S_n = k = \dfrac{(\ln(2))^k}{k!}\mathrm{e}^{-\ln(2)} = \mathbb{P}(S = k)$ avec $S \hookrightarrow \mathcal{P}(\ln(2))$.

Conclusion : $\boxed{\text{La suite } (S_n)_{n\geqslant 2} \text{ converge en loi vers une variable aléatoire } S \text{ telle que } S \hookrightarrow \mathcal{P}(\ln(2))}$.

Partie 3

12. Par quotient de fonctions usuelles, la fonction h est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et pour tout réel $x > 0$:

$$h'(x) = \frac{\mathrm{e}^x x - (\mathrm{e}^x - 1)1}{x^2} = \frac{(x-1)\mathrm{e}^x + 1}{x^2}$$

De plus, au voisinage de 0, comme la fonction exp y admet un développement limité à l'ordre 2, on obtient :

$$h(x) = \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1}{x} = 1 + \frac{1}{2}x + x\varepsilon(x)$$

avec $\varepsilon(x) \to 0$ lorsque $x \to 0$ donc h est continue en 0 et h est dérivable en 0 et $\boxed{h'(0) = \frac{1}{2}}$. Ainsi, h est continue et dérivable sur $[0, +\infty[$. Reste à étudier la continuité de h' est 0. Toujours avec le développement limité de exp au voisinage de 0 à l'ordre 2 :

$$h'(x) = \frac{(x-1)\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right) + 1}{x^2} = \frac{x + x^2 - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) + 1}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2} = h'(0)$$

donc h' est continue en 0. Conclusion : $\boxed{h \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, +\infty[}$.

13. (a) La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de h sur $[0, +\infty[$ qui s'annule en 0 donc elle est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, +\infty[$ et il en va de même de g. De plus, pour tout réel $x \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -\mathrm{e}^{-x}\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}h(x) = -\mathrm{e}^{-x}\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}\left(h(x) - 1 + 1\right) \\ &= -\mathrm{e}^{-x}\int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x h'(t)\,\mathrm{d}t + 1\right) \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0, +\infty[\,,\ g'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(1 - \int_0^x \left(h(t) - h'(t)\right)\,\mathrm{d}t\right)}$.

(b) D'après les calculs qui précèdent, pour tout réel $t > 0$:

$$h(t) - h'(t) = \frac{e^t - 1}{t} - \frac{(t-1)e^t + 1}{t^2} = \frac{te^t - t}{t^2} - \frac{(t-1)e^t + 1}{t^2}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t > 0,\ h(t) - h'(t) = \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2}}$.

(c) Pour $t = 0$, on a : $h(0) - h'(0) = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} > 0$. Pour $t > 0$, on a :

$$h(t) - h'(t) = \frac{e^t - 1 - t}{t^2} = \frac{e^t - (1+t)}{t^2} \geqslant 0$$

d'après la question 1. Conclusion : $\boxed{\forall t \geqslant 0,\ h(t) - h'(t) \geqslant 0}$.
De plus, pour tout réel $x > 0$:

$$\begin{aligned}\int_0^x (h(t) - h'(t))\ dt &= \int_0^x \frac{e^t - (1+t)}{t^2}\ dt \geqslant \frac{1}{x^2} \int_0^x \left(e^t - 1 - t\right)\ dt \\ &\geqslant \frac{1}{x^2}\left[e^t - t - \frac{1}{2}t^2\right]_0^x = \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2}\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

donc, par comparaison, on conclut que : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \displaystyle\int_0^x (h(t) - h'(t))\ dt = +\infty}$.

(d) Comme $t \mapsto h(t) - h'(t)$ est positive sur $[0, +\infty[$ alors la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x (h(t) - h'(t))\ dt$ est croissante sur $[0, +\infty[$ de limite 0 en 0 et de limite $+\infty$ en $+\infty$. Par théorème des valeurs intermédiaires, elle prend la valeur en un réel $x = \gamma$. Si ce réel γ n'était pas unique alors, par monotonie, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x (h(t) - h'(t))\ dt$ serait constante sur un segment $[a, b]$ (contenant γ) donc la fonction $t \mapsto h(t) - h'(t)$ serait nulle sur $[a, b]$ et alors $e^t = 1 + t$ sur $[a, b]$ ce qui est absurde.
Ainsi, g' est positive sur $[0, \gamma]$ et négative sur $[\gamma, +\infty[$ (grâce à la croissance de la fonction intégrale). On en déduit que g est croissante sur $[0, \gamma]$ et décroissante sur $[\beta, +\infty[$. Comme g est décroissante et minorée par 0 alors g admet une limite finie $\ell \geqslant 0$ en $+\infty$.

x	0		γ		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$g(\gamma)$	$\searrow$	$\ell \geqslant 0$

14. (a) Il suffit de prouver que $\dfrac{1}{2}t^2 \leqslant e^t - 1 - t \leqslant \dfrac{1}{2}t^2e^t$ pour tout $t > 0$ (et même $t = 0$ dans ce cas-ci). Pour cela, nous allons étudier le signe des fonction $g_1 : t \mapsto e^t - 1 - t - \dfrac{1}{2}t^2$ et $g_2 : t \mapsto e^t - 1 - t - \dfrac{1}{2}t^2e^t$ sur $\mathbb{R}_+$. Par développement en série de l'exponentielle, pour tout $t \geqslant 0$:

$$g_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2} \frac{t^k}{k!} = \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \geqslant 0$$

la fonction g_2 est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \geqslant 0$, on a :

$$g_2'(t) = e^t - 0 - 1 - \frac{1}{2}\left[2te^t + t^2e^t\right] = e^t - 1 - te^t - \frac{1}{2}t^2e^t$$

$$g_2''(t) = e^t - 0 - \left[1e^t + te^t\right] - \frac{1}{2}\left[2te^t + t^2e^t\right] = -e^t\left[2t + \frac{1}{2}t^2\right] \leqslant 0$$

donc g_2' est décroissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme $g_2'(0) = 0$ alors g_2' est négative sur $\mathbb{R}_+$. Alors g_2 est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et comme $g_2(0) = 0$ alors g_2 est négative sur $\mathbb{R}_+$.

Conclusion : $\boxed{\forall t > 0,\ \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{e^t - 1 - t}{t^2} \leqslant \dfrac{1}{2}e^t}$.

(b) Soit $x \geqslant 0$. L'inégalité précédente se prolonge « par continuité » en $t=0$ par théorème d'encadrement. Alors, on peut intégrer cette double inégalité sur $[0,x]$:

$$\frac{1}{2}x \leqslant \int_0^x (h(t)-h'(t))\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-1\right)$$

d'où :

$$\frac{3-\mathrm{e}^x}{2} = 1-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x-1\right) \leqslant 1-\int_0^x (h(t)-h'(t))\,\mathrm{d}t \leqslant 1-\frac{1}{2}x = 1-\frac{x}{2}$$

et en multipliant par e^{-x} on conclut : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \mathrm{e}^{-x}\dfrac{3-\mathrm{e}^x}{2} \leqslant g'(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(1-\dfrac{x}{2}\right)}$.

(c) En $x=\ln(3)$ l'inégalité de gauche donne : $0 \leqslant g'(\ln(3))$. En $x=2$, l'inégalité de droite donne : $g'(2) \leqslant 0$. Ainsi : $g'(2) \leqslant g'(\gamma) \leqslant g'(\ln(3))$. Par continuité de g' et unicité de γ, on conclut que : $\boxed{\gamma \in [\ln(3),2]}$.

15. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n]$. Comme $x \geqslant 0$ alors :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{x^{k-n}}{k\times(k-1)\times\cdots\times(n+1)}$$

Comme $k \geqslant n+1$ alors $k\times(k-1)\times\cdots\times(n+1) \geqslant (n+1)^{k-n}$ (il y a bien $k-n$ facteurs dans le membre de gauche) donc :

$$\frac{x^{k-n}}{k\times(k-1)\times\cdots\times(n+1)} \leqslant \frac{x^{k-n}}{(n+1)^{k-n}} = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n}$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant n < n+1$ alors $0 \leqslant \dfrac{x}{n+1} < 1$ donc la série géométrique est convergente et ainsi :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n}$$

On calcule alors la somme de la série géométrique :

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n} = \frac{x}{n+1}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-(n+1)} = \frac{x}{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k} = \frac{x}{n+1}\times\frac{1}{1-\frac{x}{n+1}} = \frac{x}{n+1-x}$$

Comme $0 \leqslant x \leqslant n$ alors $1 \leqslant n+1-x$ donc $\dfrac{x}{n+1-x} \leqslant x$ d'où la conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,n],\quad \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^n}{n!}\sum_{k=n+1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k-n} \leqslant \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}}$$

Toujours avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n]$, on a alors :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} \leqslant \mathrm{e}^x-1 \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!} + \frac{x^{n+1}}{n!}$$

donc si $x \neq 0$:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!} \leqslant \frac{\mathrm{e}^x-1}{x} \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!} + \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!} \leqslant h(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!} + \frac{x^n}{n!}$$

Cette dernière double inégalité est encore valable pour $x=0$ (ce sont des égalités). Conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,n],\quad \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!} \leqslant h(x) \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{x^{k-1}}{k!} + \frac{x^n}{n!}}$$

(b) Toujours avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,n]$, en intégrant cette double inégalité sur le segment $[0,x]$:

$$\int_0^x \sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-1}}{k!}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{t^{k-1}}{k!} + \frac{t^n}{n!}\right)\mathrm{d}t$$

d'où par linéarité de l'intégrale :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k} \leqslant \int_0^x h(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

et on multiplie enfin par e^{-x} pour conclure :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in [0,n]\,, \quad \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k}\right) \leqslant g(x) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k}\right) + \mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}$$

Soit $x \geqslant 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant x$. Ainsi $x \in [0,n]$ et on peut appliquer ce qui précède. Comme $0 \leqslant \dfrac{x^k}{k!k} \leqslant \dfrac{x^k}{k!}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \geqslant 0$ alors la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 1}\frac{x^k}{k!k}$ est convergente . De plus, par croissance comparée usuelle (ou terme général de la série exponentielle qui converge vers 0), on a : $\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Alors, par théorème d'encadrement, on conclut que : $\boxed{\forall x \geqslant 0,\ g(x) = \mathrm{e}^{-x}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k!k}}$.

16. On calcule une valeur approchée de $g(x)$ à l'aide d'une somme partielle de la série précédente grâce à l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant x \implies 0 \leqslant g(x) - \mathrm{e}^{-x}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k!k}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

Comme les valeurs de x sont limitées à la valeur 2, l'entier n vaut au moins 2 d'où l'initialisation proposée. Le programme complété est le suivant :ompléter le programme suivant pour qu'il trace la partie de la courbe de g comprise entre les abscisses $\ln(3)$ et 2, les valeurs de g étant calculées à 10^{-4} près :

```python
X = np.linspace(np.log(3),2,100)
Y = []
for x in X :
    n = 2 ; s = x+x**2/4 ; d = x**3/6
    while d*np.exp(-x) > 0.0001 :
        n = n+1
        s = s+d/n
        d = d*x/(n+1)
    Y.append(s*np.exp(-x))
plt.plot(X,Y)
plt.grid()
plt.show()
```

Partie 4

17. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $a_{n,s}$ est la variable aléatoire égale au premier rang k tel que $[X_k > s]$ est réalisé ou bien à n si aucun de ces événements n'est réalisé. Soit $\omega \in [K_{n,s} = 1]$. Alors :

$$a_{n,s}(\omega) = k \qquad Y_{n,s}(\omega) = X_{a_{n,s}(\omega)}(\omega) \qquad Z_n(\omega) = X_{a_{n,s}(\omega)}(\omega)$$

donc $\omega \in [Y_{n,s} = Z_n]$. Par croissance de la probabilité, on conclut que : $\boxed{\mathbb{P}\left(Y_{n,s} = Z_n\right) \geqslant \mathbb{P}\left(K_{n,s} = 1\right)}$.

(b) On a la réunion suivante constituée d'événements deux à deux incompatibles :

$$[K_{n,s} = 1] = \bigcup_{k=1}^{n}\left([X_k > s] \cap \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}[X_i \leqslant s]\right)$$

donc :

$$\mathbb{P}\left(K_{n,s} = 1\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}\left([X_k > s] \cap \bigcap_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}[X_i \leqslant s]\right)$$

Par indépendance des variables aléatoires X_i :

$$\mathbb{P}\left(K_{n,s} = 1\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\mathbb{P}\left(X_k > s\right) \times \prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}\mathbb{P}\left(X_i \leqslant s\right)\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(p_k\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}(1-p_i)\right)$$

Or, toujours par indépendance des X_i (mais aussi par définition de Z_n) :

$$\theta = \mathbb{P}\left(Z_n \leqslant s\right) = \mathbb{P}\left([X_1 \leqslant s] \cap \cdots \cap [X_n \leqslant s]\right) = \prod_{i=1}^{n}(1-p_i)$$

donc :

$$\frac{\mathbb{P}\left(K_{n,s}=1\right)}{\theta}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{p_k\prod_{i\in[\![1,n]\!]\setminus\{k\}}\left(1-p_i\right)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-p_i\right)}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}$$

Conclusion : $\boxed{\mathbb{P}\left(K_{n,s}=1\right)=\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}}$.

(c) Alors :

$$\mathbb{P}\left(Y_{n,s}=Z_n\right)\geqslant\mathbb{P}\left(K_{n,s}=1\right)=\theta\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}$$

Or :

$$\ln(\theta)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1-p_k\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(-p_k\right)=-\sum_{k=1}^{n}p_k\leqslant-\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{1-p_k}$$

puisque $1-p_k\leqslant 1$ donc $\dfrac{1}{1-p_k}\geqslant 1$ d'où $\dfrac{p_k}{1-p_k}\geqslant p_k$ et on en conclut que : $\boxed{\mathbb{P}\left(Y_{n,s}=Z_n\right)\geqslant-\theta\ln(\theta)}$.

(d) On a $\theta=F_n(s)$. Or, la fonction $h_1:\theta\mapsto-\theta\ln(\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$ et on a :

$$h_1'(\theta)=-\ln(\theta)-1>0\iff\theta<\mathrm{e}^{-1}$$

donc h_1 est maximale en e^{-1} et $h_1(\mathrm{e}^{-1})=-\mathrm{e}^{-1}(-1)=\mathrm{e}^{-1}$. Alors, pour $F_n(s)=\theta=\mathrm{e}^{-1}$, on a : $\mathbb{P}\left(Y_{n,s}=Z_n\right)\geqslant\mathrm{e}^{-1}$. Comme F_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de limites 0 en $-\infty$ et 1 en $+\infty$ alors, par théorème des valeurs intermédiaires, comme $\mathrm{e}^{-1}\in\,]0,1[$, on a :

$$\boxed{\exists s\in\mathbb{R}\;/\;F_n(s)=\mathrm{e}^{-1}\text{ et }\mathbb{P}\left(Y_{n,s}=Z_n\right)\geqslant\mathrm{e}^{-1}}$$

18. (a) On a :

$$p=p_k=\mathbb{P}\left(X_k>s\right)=1-\mathbb{P}\left(X_k\leqslant s\right)=\begin{cases}0 & \text{si } s<0\\ 1-s & \text{si } 0\leqslant s<1\\ 1 & \text{si } s\geqslant 1\end{cases}$$

Comme $p\neq 1$ (hypothèse de la partie 4) alors $s<1$. Comme $p\neq 0$ (hypothèse à partir de maintenant) alors $s\geqslant 0$. Ainsi, $p=1-s$ donc $\boxed{s=1-p}$.

(b) Simulation du couple aléatoire $(Z_nY_{n,s})$:

```python
def simulCouple(n,p) : # s=1-p
        Y=-1 ; Z=0
        for k in range(1,n+1) :
                X=rd.random()
                if Y==-1 and X>1-p : Y=X
                if Z<X : Z=X
        if Y==-1 : Y=X
        return Z,Y
```

(c) On utilise la fonction qui précède à chacune des N répétitions afin d'estimer r_{10} par fréquence de réalisation de l'événement $[Y_{n,s}=Z_n]$:

```python
N=10**4 ; n=10 ; p=0.15 ; r=0
for k in range(N) :
        [Z,Y]=simulCouple(n,p)
        if Z==Y : r=r+1
r=r/N ; print(r)
```

19. (a) Soit $x\in\mathbb{R}$ et $i\in I_j$. Par définition de la probabilité conditionnelle puis par indépendance des variables aléatoire X_h, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{A_j}\left(X_i\leqslant x\right)&=\frac{\mathbb{P}\left(\left[X_i\leqslant x\right]\bigcap\left(\bigcap_{i'\in I_j}\left[X_{i'}>s\right]\right)\bigcap\left(\bigcap_{i'\notin I_j}\left[X_{i'}\leqslant s\right]\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I_j}\left[X_i>s\right]\right)\bigcap\left(\bigcap_{i\notin I_j}\left[X_i\leqslant s\right]\right)\right)}\\
&=\frac{\mathbb{P}\left(\left[s<X_i\leqslant x\right]\bigcap\left(\bigcap_{i'\in I_j\setminus\{i\}}\left[X_{i'}>s\right]\right)\bigcap\left(\bigcap_{i'\notin I_j}\left[X_{i'}\leqslant s\right]\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i\in I_j}\left[X_i>s\right]\right)\bigcap\left(\bigcap_{i\notin I_j}\left[X_i\leqslant s\right]\right)\right)}\\
&=\frac{\mathbb{P}\left(s<X_i\leqslant x\right)\times\prod_{i'\in I_j\setminus\{i\}}\mathbb{P}\left(X_{i'}>s\right)\prod_{i'\notin I_j}\mathbb{P}\left(X_{i'}\leqslant s\right)}{\mathbb{P}\left(s<X_i\right)\times\prod_{i'\in I_j\setminus\{i\}}\mathbb{P}\left(X_{i'}>s\right)\prod_{i'\notin I_j}\mathbb{P}\left(X_{i'}\leqslant s\right)}\\
&=\frac{\mathbb{P}\left(s<X_i\leqslant x\right)}{\mathbb{P}\left(s<X_i\right)}
\end{aligned}$$

Comme $p = 1 - F(s)$, on conclut que : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \forall i \in I_j,\ \mathbb{P}_{A_j}(X_i \leqslant x) = \begin{cases} \dfrac{F(x) - F(s)}{p} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$.

De même, pour $J_j \subset I_j$ de cardinal $m \in [\![1, k]\!]$, on a :

$$\mathbb{P}_{A_j}\left(\bigcap_{i \in J_j} [X_i \leqslant x]\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i' \in J_j} [s < X_{i'} \leqslant x]\right) \cap \left(\bigcap_{i' \in I_j \setminus J_j} [X_{i'} > s]\right) \cap \left(\bigcap_{i' \notin I_j} [X_{i'} \leqslant s]\right)\right)}{\mathbb{P}\left(\left(\bigcap_{i' \in J_j} [X_{i'} > s]\right) \cap \left(\bigcap_{i \in I_j \setminus J_j} [X_i > s]\right) \cap \left(\bigcap_{i \notin I_j} [X_i \leqslant s]\right)\right)}$$
$$= \prod_{i \in J_j} \frac{\mathbb{P}(s < X_i \leqslant x)}{\mathbb{P}(s < X_i)} = \prod_{i \in J_j} \mathbb{P}_{A_j}(X_i \leqslant x)$$

Conclusion : $\boxed{\text{La famille } (X_i)_{i \in I_j} \text{ est indépendante pour la probabilité } \mathbb{P}_{A_j}}$.

(b) Soit $r \in I_j$. On a alors :

$$\mathbb{P}_{A_j}\left(X_r = \max_{i \in I_j}(X_i)\right) = \mathbb{P}_{A_j}\left(\max_{i \in I_j \setminus \{r\}}(X_i) \leqslant X_r\right)$$

D'après ce qui précède, par lemme des coalitions, $\max\limits_{i \in I_j \setminus \{r\}}(X_i)$ et X_r sont indépendantes pour $\mathbb{P}_{A_j}$. La question précédente donne la fonction de répartition de X_i dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}_{A_j})$ donc une densité, obtenue par dérivation puisque les propriétés sont conservées, est la fonction : $x \mapsto \begin{cases} \dfrac{f(x)}{p} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ (on complète par 0 en $x = s$). De même la répartition de $\max\limits_{i \in I_j \setminus \{r\}}(X_i)$ est la fonction : $x \mapsto \begin{cases} \left(\dfrac{F(x) - F(s)}{p}\right)^{k-1} & \text{si } x > s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Alors, le théorème admis donne :

$$\boxed{\mathbb{P}_{A_j}\left(X_r = \max_{i \in I_j}(X_i)\right)} = \int_s^{+\infty} \left(\frac{F(t) - F(s)}{p}\right)^{k-1} \frac{f(t)}{p}\,\mathrm{d}t = \boxed{\frac{1}{p^k} \int_s^{+\infty} (F(t) - F(s))^{k-1} f(t)\,\mathrm{d}t}$$
$$= \frac{1}{p^k} \lim_{A \to +\infty} \left[\frac{(F(t) - F(s))^k}{k}\right]_s^A = \frac{1}{p^k} \lim_{A \to +\infty} \frac{(F(A) - F(s))^k}{k}$$

Comme $F(s) = 1 - p$ et comme $F(A) \xrightarrow[A \to +\infty]{} 1$ alors :

$$\boxed{\mathbb{P}_{A_j}\left(X_r = \max_{i \in I_j}(X_i)\right)} = \frac{1}{p^k} \lim_{A \to +\infty} \frac{p^k}{k} = \boxed{\frac{1}{k}}$$

(c) Comme $[K_{n,s} = k] = \bigcup\limits_{i=1}^{\binom{n}{k}} A_j$ (réunion disjointe) alors :

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = k]) = \sum_{j=1}^{\binom{n}{k}} \mathbb{P}([Y_{n,s} = Z_n] \cap A_j)}$$

De plus, pour j fixé, d'après la question précédente, on a :

$$\boxed{\mathbb{P}_{A_j}(Y_{n,s} = Z_n) = \mathbb{P}_{A_j}\left(X_{\min(I_j)} = \max_{i \in I_j}(X_i)\right) = \frac{1}{k}}$$

(d) Comme $[K_{n,s} = 0] = \bigcap\limits_{i=1}^{n} [X_i \leqslant s]$ est l'événement A_1 lorsque $k = n$ alors :

$$[Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = 0] = \left[X_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)\right] \cap A_1$$

$$\boxed{\mathbb{P}([Y_{n,s} = Z_n] \cap [K_{n,s} = 0])} = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}_{A_j}\left(X_n = \max_{1 \leqslant i \leqslant n}(X_i)\right) = s^n \frac{1}{n} = \boxed{\frac{1}{n}(1 - p)^n}$$

(e) On déduit de ce qui précède que :

$$\mathbb{P}\left([Y_{n,s}=Z_n]\cap[K_{n,s}=k]\right)=\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}}\mathbb{P}(A_j)\,\mathbb{P}_{A_j}(Y_{n,s}=Z_n)=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}}\mathbb{P}(A_j)$$

$$=\frac{1}{k}\sum_{j=1}^{\binom{n}{k}}(1-s)^k s^{n-k}=\frac{1}{k}\binom{n}{k}(1-s)^k s^{n-k}=\frac{1}{k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$$

d'où l'on tire que :

$$\boxed{r_n}=\mathbb{P}(Y_{n,s}=Z_n)=\sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}\left([Y_{n,s}=Z_n]\cap[K_{n,s}=k]\right)=\boxed{\frac{1}{n}(1-p)^n+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}}$$

20. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. La question 10 donne :

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}-\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right|\leqslant\frac{4\lambda^2}{n}$$

A fortiori : $\boxed{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\left|\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}-\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right|\leqslant\frac{4\lambda^2}{n}}$.

(b) Par inégalité triangulaire, on en déduit que :

$$\left|\sum_{k=0}^{n}\left[\frac{1}{k}\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}-\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right]\right|\leqslant\frac{4\lambda^2}{n}$$

$$\left|r_n-\frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n-\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{k!k}\right|\leqslant\frac{4\lambda^2}{n}$$

Comme $\frac{1}{n}\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$, comme $\frac{4\lambda^2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ et comme $\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda^k}{k!k}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!k}$, on en déduit que : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}r_n=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!k}\right)\mathrm{e}^{-\lambda}}$.

21. On a : $s=1-p=1-\frac{\lambda}{n}$. Or, d'après les questions 15b et 13d :

$$r_n=\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!k}\right)\mathrm{e}^{-\lambda}=g(\lambda)\leqslant g(\gamma)$$

donc r_n est maximal lorsque $\lambda=\gamma$ c'est-à-dire lorsque $\boxed{s=1-\frac{\gamma}{n}}$.