Solution de l'exercice 1

1. (a) Les solutions de l'équation différentielle $x' = -x$ sont les fonctions

$$\boxed{x\colon \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & Ae^{-t} \end{array} \quad \text{avec } A \in \mathbf{R}}.$$

(b) Soient a et b deux nombres réels, on considère la fonction x_0 définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R}, \quad x_0(t) = (at+b)e^{-t}.$$

Cette fonction sur $\mathbf{R}$ est dérivable comme produit de fonctions dérivables et, pour tout $t \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} x_0'(t) &= ae^{-t} - (at+b)e^{-t} \\ &= ae^{-t} - x_0(t) \\ &= -x_0(t) + ae^{-t}. \end{aligned}$$

Il vient que x_0 est solution de (E) si et seulement si $a = 1$; en particulier $\boxed{x_0\colon t \mapsto te^{-t}}$ est une solution particulière de (E).

(c) D'après le principe de superposition, les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x = x_0 + x_1$$

où x_0 est la solution particulière, et x_1 est une solution de l'équation homogène. Ainsi les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions

$$\boxed{x\colon \begin{array}{ccc} \mathbf{R} & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ t & \longmapsto & (t+A)e^{-t} \end{array} \quad \text{avec } A \in \mathbf{R}}.$$

2. (a) Le système (S) équivaut à $X'(t) = AX(t)$ avec $\boxed{A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

La matrice triangulaire A admet -1 pour unique valeur propre. Si A était diagonalisable, il existerait une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ telle que

$$A = P\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P^{-1} = P(-I_2)P^{-1} = -PP^{-1} = -I_2 \quad \text{absurde!}$$

Donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.

(b) Le système différentiel (S) est linéaire à coefficients constants ; d'après le théorème de Cauchy (S) admet une unique solution (x, y) telle que $(x(0), y(0)) = (1, 1)$.

(c) La fonction y vérifie $y'(t) = -y(t)$ sur $\mathbf{R}$, par conséquent il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $y(t) = Ae^{-t}$ sur $\mathbf{R}$. La condition $y(0) = 1$ donne $A = 1$, donc $\boxed{y(t) = e^{-t} \text{ sur } \mathbf{R}}$.
La fonction x vérifie $x'(t) = -x(t) + y(t)$ soit $x'(t) = -x(t) + e^{-t}$ sur $\mathbf{R}$. D'après la question 1 il existe $A \in \mathbf{R}$ tel que $x(t) = (t+A)e^{-t}$ sur $\mathbf{R}$. La condition $x(0) = 1$ donne $A = 1$, donc $\boxed{x(t) = (t+1)e^{-t} \text{ sur } \mathbf{R}}$.
En conclusion : $\boxed{\forall t \in \mathbf{R}, \quad (x(t), y(t)) = ((t+1)e^{-t}, e^{-t})}$.

(d) On a $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{-t} = 0$, et $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = \lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} + e^{-t} = 0$ car $\lim\limits_{t\to+\infty} te^{-t} = 0$ par croissance comparée. Donc $\boxed{(x, y) \text{ converge vers l'état d'équilibre } (0,0) \text{ lorsque } t \to +\infty}$.

 Tournez la page S.V.P.

3.
```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

T = np.linspace(-2,10,200)
x = [(t + 1)*np.exp(-t) for t in T]
y = [np.exp(-t) for t in T]

plt.title("Trajectoire de la solution")
plt.plot(x,y)
plt.show()
```

4. (a) Limite en $+\infty$: par produit de limites $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)e^{kx} = +\infty}$.

Limite en $-\infty$: on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{kx} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{kx} = 0$ par croissance comparée, d'où

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_k(x) = \lim_{x\to-\infty} xe^{kx} + e^{kx} = 0}.$$

(b) La fonction f_k est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme produit de fonctions dérivables, de plus

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad f_k'(x) = e^{kx} + (x+1)ke^{kx} = (kx+k+1)e^{kx}.$$

Comme $e^{kx} > 0$ sur $\mathbf{R}$, il vient :

$$\begin{aligned} f_k'(x) \geqslant 0 &\iff kx+k+1 \geqslant 0 \\ &\iff kx \geqslant -k-1 \\ &\iff x \geqslant -1-\frac{1}{k}. \end{aligned}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		$-1-\frac{1}{k}$		-1		0		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0			$+$			
$f_k(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{e^{-(k+1)}}{k}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

5. (a) Soit $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} f_{k+1}(x) \geqslant f_k(x) &\iff (x+1)e^{(k+1)x} \geqslant (x+1)e^{kx} \\ &\iff (x+1)e^{kx}e^{x} \geqslant (x+1)e^{kx} \\ &\iff (x+1)e^{x} \geqslant x+1 \quad \text{(en simplifiant par } e^{kx} > 0) \\ &\iff (x+1)(e^{x}-1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

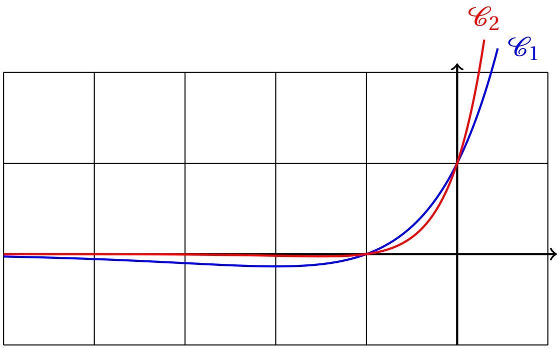
Or nous avons

$$\begin{aligned} e^{x}-1 \geqslant 0 &\iff e^{x} \geqslant 1 \\ &\iff x \geqslant 0. \end{aligned}$$

Nous en déduisons le tableau suivant :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)(e^x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi $\mathscr{C}_{k+1}$ se situe au-dessus de $\mathscr{C}_k$ sur les abscisses $]-\infty,-1]\cup[0,+\infty[$, et en-dessous de $\mathscr{C}_k$ sur les abscisses $[-1,0]$. Les courbes $\mathscr{C}_{k+1}$ et $\mathscr{C}_k$ s'intersectent aux points de coordonnées $(-1,0)$ et $(0,0)$.

(b) 

6. (a) La fonction f_k prenant des valeurs négatives sur $]\infty,-1]$, l'équation $f_k(x)=k$ n'a pas de solution dans cet intervalle. La fonction f_k est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1\,;\,+\infty[$, elle réalise donc une bijection de $[-1,+\infty[$ sur $f_k([-1,+\infty[)=[0,+\infty[$. Comme $k\in[0,+\infty[$, il vient que l'équation $f_k(x)=k$ admet une unique solution dans $[0,+\infty[$.
Conclusion : $\boxed{\text{l'équation } f_k(x)=k \text{ admet une unique solution } u_k \text{ dans } \mathbf{R}\text{, de plus } u_k\in[0,+\infty[}$.

(b) On remarque que $f_1(0)=1$, par unicité de la solution à l'équation $f_1(x)=1$ on a $\boxed{u_1=0}$.

7. Soit $k\geqslant 1$, on trouve $f_k(0)=1$ et $f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)=\ln(k)+k$, ainsi

$$\begin{aligned}1\leqslant k\leqslant k+\underbrace{\ln(k)}_{\geqslant 0} &\iff f_k(0)\leqslant f_k(u_k)\leqslant f_k\left(\frac{\ln(k)}{k}\right)\\ &\iff \boxed{0\leqslant u_k\leqslant\frac{\ln(k)}{k}} \quad (f_k \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R}_+).\end{aligned}$$

Notons que $\lim\limits_{k\to+\infty}\dfrac{\ln(k)}{k}=0$ par croissance comparée. À l'aide du théorème des gendarmes, on en déduit que $\boxed{\text{la suite } (u_k) \text{ converge vers } 0}$.

8. (a) Soit $k\in\mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned}f_k(u_k)=k &\iff (u_k+1)e^{ku_k}=k\\ &\iff \ln(u_k+1)+\ln(e^{ku_k})=\ln(k)\\ &\iff ku_k=\ln(k)-\ln(u_k+1)\\ &\iff \boxed{u_k=\frac{\ln(k)}{k}-\frac{\ln(u_k+1)}{k}}.\end{aligned}$$

(b) D'après l'égalité précédente,

$$u_k\times\frac{k}{\ln(k)}=1-\frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)}.$$

Or, sachant que (u_k) converge vers 0,

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\ln(u_k+1)}{\ln(k)} = \frac{0}{+\infty} = 0.$$

Donc $\lim_{k\to+\infty} u_k \times \frac{k}{\ln(k)} = 1$, c'est–à–dire $\boxed{u_k \sim \frac{\ln(k)}{k} \text{ lorsque } k \to +\infty}$.

9. La série de Riemann $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k}$ est divergente, or $\frac{1}{k} \leqslant \frac{\ln(k)}{k}$ pour tout $k \geqslant 3$, donc la série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln(k)}{k}$ diverge par comparaison de séries à termes positifs.
   On sait que $u_k \sim \frac{\ln(k)}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$, les séries $\sum u_k$ et $\sum \frac{\ln(k)}{k}$ sont donc de même nature selon le critère de comparaison des séries à termes positifs, ainsi $\boxed{\text{la série } \sum_{k\geqslant 1} u_k \text{ diverge}}$.

Solution de l'exercice 2

1. On trouve $\boxed{A^2 = -I_2}$. On en déduit $(-A)A = I_2$, par conséquent $\boxed{A \text{ est inversible avec } A^{-1} = -A}$.
2. On a $A^2 + I_2 = 0_2$, de manière équivalente x^2+1 est un polynôme annulateur de A. Comme $x^2+1 \geqslant 1$ pour tout $x \in \mathbf{R}$, il vient que x^2+1 n'a pas de racine réelle, ce qui entraîne que A ne possède pas de valeur propre réelle, en particulier $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$.
3. Le sous–ensemble $\mathscr{C}$ de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ satisfait les deux conditions suivantes :
   - $\mathscr{C}$ est non vide car il contient la matrice nulle de $\mathscr{M}_2(\mathbf{R})$.
   - $\mathscr{C}$ est stable par combinaison linéaire. En effet, soit $(M,N) \in \mathscr{C}^2$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$, alors

     $$\begin{aligned} A(\lambda M + N) &= \lambda AM + AN \\ &= \lambda MA + NA \quad (\text{car } M, N \in \mathscr{C}) \\ &= (\lambda M + N)A, \end{aligned}$$

     donc $\lambda M + N \in \mathscr{C}$.

   En conclusion : $\boxed{\mathscr{C} \text{ est un sous–espace vectoriel de } \mathscr{M}_2(\mathbf{R})}$.

4. (a) Posons $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{aligned} AM = MA &\iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} c = -b \\ d = a \end{cases} \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Les solutions dans } \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \text{ de l'équation } AM = MA \text{ sont les matrices } \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} \text{ avec } a, c \in \mathbf{R}.}$$

(b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\mathscr{C} &= \left\{\begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix} ; (a,c) \in \mathbf{R}^2\right\} \\
&= \left\{a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} ; (a,c) \in \mathbf{R}^2\right\} \\
&= \left\{aI_2 + cA ; (a,c) \in \mathbf{R}^2\right\} \\
&= \mathrm{Vect}(I_2, A).
\end{aligned}$$

Ainsi (I_2, A) est une famille génératrice de $\mathscr{C}$. Cette famille est de plus libre car les matrices I_2 et A ne sont pas colinéaires. Finalement $\boxed{(I_2, A) \text{ forme une base de } \mathscr{C}}$.

5. (a) Soit $M = aI_2 + bA$ et $N = cI_2 + dA$ deux matrices de $\mathscr{C}$, alors

$$\begin{aligned}
MN &= (aI_2 + bA)(cI_2 + dA) \\
&= acI_2 + adA + bcA + bdA^2 \\
&= (ac - bd)I_2 + (ad + bc)A \quad (\text{car } A^2 = -I_2).
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{MN \in \mathscr{C}}$.

(b) Les matrices M et N sont des combinaisons linéaires de I_2 et A, or les matrices I_2 et A commutent, donc $\boxed{M \text{ et } N \text{ commutent}}$ par distributivité du produit matriciel.

6. Soit $M = aI_2 + bA$ une matrice non nulle de $\mathscr{C}$, c'est–à–dire avec $(a, b) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Alors

$$M = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \det(M) = a^2 + b^2 > 0.$$

Ainsi la matrice $\boxed{M \text{ est inversible avec } M^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}}$ d'après une formule du cours.

7. (a) On a :

$$\begin{aligned}
M^2 &= (aI_2 + bA)^2 \\
&= a^2 I_2 + 2abA + b^2 A^2 \quad (A \text{ et } I_2 \text{ commutent}) \\
&= \boxed{(a^2 - b^2)I_2 + 2abA} \quad (\text{car } A^2 = -I_2).
\end{aligned}$$

(b) Ainsi,

$$\begin{aligned}
P(M) = 0_2 &\iff M^2 + uM + vI_2 = 0_2 \\
&\iff \left[(a^2 - b^2)I_2 + 2abA\right] + u(aI_2 + bA) + vI_2 = 0_2 \quad (\text{vu la question a}) \\
&\iff (a^2 - b^2 + ua + v)I_2 + (2ab + ub)A = 0_2 \quad (\text{en regroupant selon } I_2 \text{ et } A) \\
&\iff \left\{\begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v &=& 0 \\ 2ab + ub &=& 0 \end{array}\right. \quad (\text{car la famille } (I_2, A) \text{ est libre})
\end{aligned}$$

8. (a) En posant $b = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
P(M) = 0_2 &\iff a^2 + ua + v = 0 \\
&\iff P(a) = 0.
\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, cette équation du second degré a pour discriminant $\Delta \geqslant 0$, elle admet donc une solution réelle. $\boxed{\text{Le système admet bien une solution de la forme } (a, 0).}$

(b) On suppose maintenant $b \neq 0$, alors

$$\begin{aligned}
P(M) = 0_2 \quad & \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ 2a + u & = & 0 \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{rcl} a^2 - b^2 + ua + v & = & 0 \\ a & = & -\frac{u}{2} \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{rcl} \frac{u^2}{4} - b^2 - \frac{u^2}{2} + v & = & 0 \\ a & = & -\frac{u}{2} \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b^2 & = & v - \frac{u^2}{4} \\ a & = & -\frac{u}{2} \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b^2 & = & -\frac{\Delta}{4} \\ a & = & -\frac{u}{2} \end{array} \right. \\
& \iff \left\{ \begin{array}{rcl} b & = & \pm\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \\ a & = & -\frac{u}{2} \end{array} \right. \qquad \text{(car } \Delta < 0\text{)}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{On trouve que le système admet exactement deux solutions de la forme } (a,b) \text{ avec } b \neq 0.}$

9. Dans le cas présent on a $P(x) = x^2 + x + 1$, ce polynôme a pour discriminant $\Delta = -3 < 0$, ainsi on se situe dans le cadre de la question précédente avec $u = 1$ et $v = 1$. D'après les calculs de la question précédente,

$$\boxed{M = -\frac{1}{2}I + \frac{\sqrt{3}}{2}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

est solution de l'équation $M^2 + M + I_2 = 0_2$.

10. Il suffit de montrer que l'application $\varphi : \mathscr{M}_2(\mathbf{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ est linéaire. Soient $M, N \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$ et soit $\lambda \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(\lambda M + N) = A(\lambda M + N)A = \lambda AMA + ANA = \lambda\varphi(M) + \varphi(N).$$

Donc $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } \mathscr{M}_2(\mathbf{R})}$.

11. Pour tout $M \in \mathscr{M}_2(\mathbf{R})$,

$$\varphi \circ \varphi(M) = \varphi(AMA) = A^2MA^2 = (-I)M(-I) = M.$$

Donc $\boxed{\varphi \circ \varphi = id_{\mathscr{M}_2(\mathbf{R})}, \text{ ainsi } \varphi \text{ est bijective et } \varphi^{-1} = \varphi}$.

12. (a) On trouve $\varphi(E_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\varphi(E_4) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) La matrice $\boxed{B \text{ est diagonalisable car symétrique}}$.

On remarque que $B^2 = I_4$, ainsi $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ est un polynôme annulateur de B d'où

$$\boxed{\mathrm{Sp}(B) \subset \{-1, 1\}}.$$

Montrons que le spectre de B n'est pas réduit à une seule valeur propre. Supposons par l'absurde $\mathrm{Sp}(B) = \{1\}$, alors il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_4(\mathbf{R})$ telle que $B = PI_4P^{-1} = PP^{-1} = I_4$, ce qui est impossible; en conclusion $\mathrm{Sp}(B) \neq \{1\}$. Le même raisonnement montre qu'on ne peut avoir $\mathrm{Sp}(B) = \{-1\}$, donc $\boxed{\mathrm{Sp}(B) = \{-1, 1\}}$.

(c) On remarque que

$$\varphi(I) = -I, \quad \varphi(A) = -A, \quad \varphi(E_2 + E_3) = E_2 + E_3, \quad \varphi(E_1 - E_4) = E_1 - E_4.$$

On a déjà vu que la famille (I, A) est libre, par conséquent elle forme une base du sous–espace propre associé à la valeur propre -1, en particulier ce sous–espace propre est $\mathscr{C}$. Les matrices E_2+E_3 et $E_1 - E_4$ étant non colinéaires, elles forment une base du sous–espace propre associé à la valeur propre 1.

Solution de l'exercice 3

1. La variable aléatoire $\boxed{X_k \text{ suit la loi uniforme sur } [\![1;N]\!]}$.
2. Si la liste `L` contient déjà `x`, alors l'exécution de la commande `ajout(L,x)` ne modifie pas `L`. Si la liste `L` ne contient pas `x`, alors l'exécution de la commande `ajout(L,x)` ajoute une nouvelle composante égale à `x` à la fin de `L`.

3.
```
import numpy.random as rd

def Simul_T(N,i):
    L = []
    k = 0
    while len(L)<i :
        x = rd.randint(1,N+1)
        ajout(L,x)
        k = k + 1
    return(k)
```

4.
```
S = 0
for i in range(100):
    S = S + Simul_T(3,2)
print(S/100)
```

Selon la loi des grands nombres, le nombre affiché est une approximation de l'espérance $E(T_2)$.

5. $\boxed{\text{L'ensemble des valeurs possibles de } T_2 \text{ est } \mathbf{N} \setminus \{0,1\}}$. En effet, on ne peut obtenir deux numéros distincts qu'en au moins deux tirages.
6. (a) Si $(X_1 = 1)$ alors la première boule tirée porte le numéro 1, et si $T_2 = k$ alors les $k-1$ premières boules tirées portent toutes le même numéro, ainsi :

$$\boxed{(T_2 = k) \cap (X_1 = 1) \; = \; (X_1 = 1) \cap \ldots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k \neq 1)}.$$

(b) Les tirages s'effectuant avec remise, les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_k$ sont indépendantes, d'où

$$\begin{aligned} P((T_2 = k) \cap (X_1 = 1)) &= P((X_1 = 1) \cap \ldots \cap (X_{k-1} = 1) \cap (X_k \neq 1)) \\ &= P(X_1 = 1) \times \ldots \times P(X_{k-1} = 1) \times P(X_k \neq 1) \\ &= \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{2}{3} \\ &= \boxed{\frac{2}{3^k}} \end{aligned}$$

(c) On applique la formule des probabilités totales avec le système $\{(X_1=1),(X_2=2),(X_1=3)\}$:

$$P(T_2=k) \;=\; P((T_2=k)\cap(X_1=1))+P((T_2=k)\cap(X_1=2))+P((T_2=k)\cap(X_1=3)).$$

Or, les trois probabilités de cette somme sont égales puisque les numéros 1, 2 et 3 jouent des rôles symétriques. Ainsi, en utilisant le résultat de la question précédente, on trouve :

$$P(T_2=k) \;=3\times P((T_2=k)\cap(X_1=1)) \;=\; 3\times\frac{2}{3^k} \;=\boxed{\frac{2}{3^{k-1}}}.$$

7. La variable aléatoire T_2 admet une espérance si la série ci–dessous converge absolument,

$$\sum_{k\geqslant 2} kP(T_2=k) \;=\; 2\sum_{k\geqslant 2} k\frac{1}{3^{k-1}}.$$

La série géométrique dérivée $\sum\limits_{k\geqslant 2} k\frac{1}{3^{k-1}}$ est convergente car $\frac{1}{3}\in]-1;1[$, et même absolument convergente car à termes positifs. On en déduit que T_2 admet une espérance donnée par :

$$\begin{aligned}
E(T_2) &= \sum_{k=2}^{+\infty} kP(T_2=k)\\
&= 2\sum_{k=2}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}}\\
&= 2\left(\sum_{k=1}^{+\infty} k\frac{1}{3^{k-1}}-1\right) \quad \text{(on modifie le premier indice)}\\
&= 2\left(\frac{1}{(1-\frac{1}{3})^2}-1\right)\\
&= 2\left(\frac{9}{4}-1\right)\\
&= \boxed{\frac{5}{2}}
\end{aligned}$$

8. La variable aléatoire Z_2 est à valeurs dans $\mathbf{N}^*$ et, pour tout $k\in\mathbf{N}^*$,

$$P(Z_2)=P(T_2-1=k)=P(T_2=k+1)=\frac{2}{3^k}=\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}.$$

$\boxed{\text{La variable aléatoire } Z_2 \text{ suit la loi géométrique de paramètre } p=\frac{2}{3}}$.

Ainsi Z_2 admet une espérance et une variance données par $E(Z_2)=\frac{1}{p}=\frac{3}{2}$ et $V(Z_2)=\frac{1-p}{p^2}=\frac{3}{4}$. On en déduit que $T_2=Z_2+1$ admet aussi une espérance et une variance, on trouve :

- par linéarité de l'espérance $E(T_2)=E(Z_2+1)=E(Z_2)+1=\dfrac{3}{2}+1=\boxed{\dfrac{5}{2}}$.
- par effet d'une transformation affine sur la variance $V(T_2)=V(Z_2+1)=V(Z_2)=\boxed{\dfrac{3}{4}}$.

9. (a) À partir du T_i–ième tirage, on considère chaque tirage est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « obtenir l'un des $N-(i-1)$ numéros qui ne sont pas déjà sortis ». La variable aléatoire Z_i donne alors le rang du premier succès dans une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $\frac{N-i+1}{N}$, par conséquent $\boxed{Z_i\hookrightarrow\mathscr{G}(\frac{N-i+1}{N})}$.

(b) On a : $\boxed{E(Z_i) = \dfrac{N}{N-i+1}}$ et $V(Z_i) = \dfrac{i-1}{N} \times \left(\dfrac{N}{N-i+1}\right)^2 = \boxed{\dfrac{N(i-1)}{(N-i+1)^2}}$.

Sachant que $Z_1 = 1$ de manière certaine, on a $E(Z_1) = 1$ et $V(Z_1) = 0$, ce qui correspond aux résultats des formules ci–dessus en prenant $i = 1$.

10. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{i} Z_k &= Z_1 + \sum_{k=2}^{i} Z_k \\
&= T_1 + \sum_{k=2}^{i} T_k - T_{k-1} \quad \text{(car } Z_1 = T_1) \\
&= T_1 + (T_i - T_1) \quad \text{(par télescopage)} \\
&= T_i.
\end{aligned}$$

11. (a) Soient $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ deux entiers, par indépendance de Z_2 et Z_3 on a :

$$\begin{aligned}
P((Z_2 = \ell) \cap (Z_3 = k)) &= P(Z_2 = \ell) \times P(Z_3 = k) \\
&= \left(\frac{1}{N}\right)^{\ell-1} \times \frac{N-1}{N} \times \left(\frac{2}{N}\right)^{k-1} \times \frac{N-2}{N} \\
&= \boxed{2^{k-1} \frac{(N-1)(N-2)}{N^{\ell+k}}}.
\end{aligned}$$

(b) Soit $n \geqslant 2$, on décompose $(Z_2 + Z_3 = n)$ en une union d'évènements incompatibles :

$$(Z_2 + Z_3 = n) = \bigcup_{k=1}^{n-1} (Z_2 = n-k) \cap (Z_3 = k).$$

Il s'ensuit :

$$\begin{aligned}
P(Z_2 + Z_3 = n) &= \sum_{k=1}^{n-1} P((Z_2 = n-k) \cap (Z_3 = k)) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \quad \text{(question précédente)} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \sum_{\ell=0}^{n-2} 2^{\ell} \quad \text{(en posant } \ell = k-1) \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{N^n} \left(2^{n-1} - 1\right) \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^n - \frac{2}{N^n}\right)
\end{aligned}$$

(c) La variable aléatoire T_3 est à valeurs dans $[\![3; +\infty[\![$. Soit $n \geqslant 3$, d'après la question 10 :

$$\begin{aligned}
P(T_3 = n) &= P(Z_1 + Z_2 + Z_3 = n) \\
&= P(Z_2 + Z_3 = n-1) \\
&= \frac{(N-1)(N-2)}{2} \left(\left(\frac{2}{N}\right)^{n-1} - \frac{2}{N^{n-1}}\right).
\end{aligned}$$

12. (a) Par linéarité on trouve :

$$\begin{aligned}
E(T_i) &= E\left(\sum_{k=1}^{i} Z_k\right) \quad \text{(question 10)}\\
&= \sum_{k=1}^{i} E(Z_k) \quad \text{(linéarité)}\\
&= \sum_{k=1}^{i} \frac{N}{N-k+1} \quad \text{(question 9b)}\\
&= N \sum_{j=N-i+1}^{N} \frac{1}{j} \quad \text{(avec le changement d'indice } j = N-k+1\text{).}
\end{aligned}$$

(b) Si $j = i$, on a $\operatorname{cov}(T_i, T_j) = \operatorname{cov}(T_i, T_i) = V(T_i)$.

Si $j > i$, en sommant par paquets on trouve :

$$T_j = \sum_{k=1}^{j} Z_k = \sum_{k=1}^{i} Z_k + \sum_{k=i+1}^{j} Z_k = T_i + \sum_{k=i+1}^{j} Z_k.$$

En appliquant la bilinéarité :

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(T_i, T_j) &= \operatorname{cov}\left(T_i, T_i + \sum_{k=i+1}^{j} Z_k\right)\\
&= \operatorname{cov}(T_i, T_i) + \operatorname{cov}\left(T_i, \sum_{k=i+1}^{j} Z_k\right)\\
&= \operatorname{cov}(T_i, T_i) + \sum_{k=i+1}^{j} \operatorname{cov}(T_i, Z_k)\,.
\end{aligned}$$

Par le lemme des coalitions, la variable aléatoire T_i est indépendantes des variables aléatoires $Z_{i+1}, \dots Z_n$. Ainsi $\operatorname{cov}(T_i, Z_j) = 0$ pour tout $j \in [\![i+1\,;\,N]\!]$, d'où

$$\boxed{\operatorname{cov}(T_i, T_j) = \operatorname{cov}(T_i, T_i) = V(T_i)}.$$