

Exercice 1

1. (a) On raisonne par récurrence :

Initialisation : par définition $u_0 = 1 > 0$, la propriété est initialisée.

Hérédité : supposons $u_n > 0$ pour un certain rang $n \in \mathbb{N}$. Alors $u_n > 0$ par hypothèse de récurrence et $e^{1/u_n} > 0$ par positivité de l'exponentielle, par suite

$$u_{n+1} = u_n e^{1/u_n} > 0.$$

Ceci montre que la propriété est héréditaire.

Conclusion : selon le principe de récurrence, on a $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_{n+1} - u_n = u_n e^{1/u_n} - u_n = u_n (e^{1/u_n} - 1),$$

or $u_n > 0$ et

$$\begin{aligned} e^{1/u_n} - 1 > 0 &\iff e^{1/u_n} > 1 \\ &\iff \frac{1}{u_n} > 0 \\ &\iff u_n > 0, \end{aligned}$$

donc $u_{n+1} - u_n > 0$. [La suite (u_n) est strictement croissante].

- (c) La suite (u_n) admet une limite car elle est croissante. Supposons par l'absurde qu'elle converge vers une limite finie ℓ , on a nécessairement $\ell > 0$ puisque (u_n) est croissante. En passant à la limite dans le relation de récurrence, on trouve $\ell = \ell e^{1/\ell}$ par continuité de l'exponentielle, or

$$\begin{aligned} \ell = \ell e^{1/\ell} &\iff 1 = e^{1/\ell} \\ &\iff 0 = \frac{1}{\ell} \text{ absurde!} \end{aligned}$$

Ainsi la limite de (u_n) est infinie, plus précisément $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ car $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- 2.

```
u = 1
n = 0
while u < 10**6 :
    u = u*np.exp(1/u)
    n = n + 1
print(n)
```

3. Limite en $+\infty$: On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{1/x} = 1$ par composition de limites. Par produit de limites on trouve : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Limite en 0^+ : On pose $X = \frac{1}{x}$, de sorte que $x e^{1/x} = \frac{e^X}{X}$. Or $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = +\infty$ par composition de limites, soit $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

4. La fonction $x \mapsto e^{1/x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme composée de fonctions dérivables, de ce fait f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ comme produit de fonctions dérivables. Pour tout $x > 0$,

$$f'(x) = 1 \times e^{1/x} - x \times \frac{e^{1/x}}{x^2} = \frac{e^{1/x}(x-1)}{x}.$$

On a $e^{1/x} > 0$ et $x > 0$ sur $\mathbf{R}_+^*$, par conséquent $f'(x)$ est de même signe que $x - 1$. On en déduit le tableau :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	e	$+\infty$

5. (a) La série $\sum_{k \geq 0} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(x^{-1})^k}{k!}$ est de type exponentiel, par conséquent elle converge et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} = \sum_{k \geq 0} \frac{(x^{-1})^k}{k!} = e^{(x^{-1})} = e^{1/x}.$$

- (b) On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= x e^{1/x} \\ &= x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \quad (\text{question précédente}) \\ &= x \left(1 + \frac{1}{x} + \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \right) \quad (\text{sommation par paquets}) \\ &= x + 1 + x \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{-k}}{k!} \\ &= x + 1 + x \times \frac{1}{x^2} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \quad (\text{linéarité}) \\ &= \boxed{x + 1 + \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}}. \end{aligned}$$

6. (a) Minoration : on a

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} = \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \geq \frac{1}{2}}$$

car la série $\sum_{k \geq 3} \frac{x^{2-k}}{k!}$ est à termes positifs.

Majoration : pour tout $k \geq 2$ on a $2 - k \leq 0$, d'où $x^{2-k} \leq 1$ car $x \geq 1$. Ainsi

$$\sum_{k=2}^n \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

pour tout $n \geq 2$. En faisant tendre n vers $+\infty$ on obtient :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e}.$$

- (b) Par la question 5-b) on sait que :

$$f(x) - (x + 1) = \frac{1}{x} \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{x^{2-k}}{k!}.$$

Ainsi, en partant de l'encadrement obtenu à la question précédente, il vient :

$$\frac{1}{2} \leq \sum_{k=2}^n \frac{x^{2-k}}{k!} \leq e$$

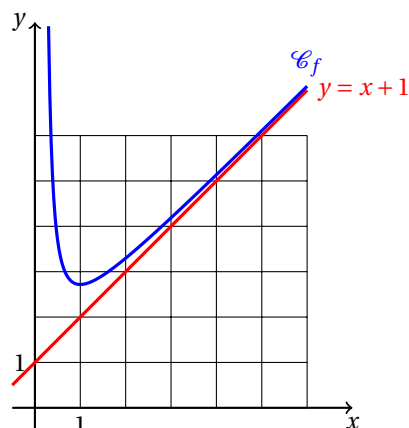
$$\frac{1}{2x} \leq \frac{1}{x} \sum_{k=2}^n \frac{x^{2-k}}{k!} \leq \frac{e}{x}$$

$$\boxed{\frac{1}{2x} \leq f(x) - (x+1) \leq \frac{e}{x}}.$$

7. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e}{x} = 0$, par le théorème des gendarmes cela implique

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+1) = 0$$

autrement dit $f(x) - (x+1) = o(1)$ lorsque x tend vers $+\infty$.



8.

9. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, par définition on a $u_{k+1} = u_k e^{1/u_k}$, sachant que la suite est à termes strictement positifs on peut prendre le logarithme de chacun des membres :

$$\begin{aligned} \ln(u_{k+1}) &= \ln(u_k e^{1/u_k}) \\ &= \ln(u_k) + \ln(e^{1/u_k}) \\ &= \ln(u_k) + \frac{1}{u_k} \end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) = \frac{1}{u_k}}.$$

(b) On somme l'égalité précédente pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \ln(u_{k+1}) - \ln(u_k) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \\ \ln(u_n) - \ln(u_0) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \quad (\text{par télescopage}) \\ \ln(u_n) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \quad (\text{car } u_0 = 1) \end{aligned}$$

10. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$, on sait que la suite (u_n) est croissante avec $u_0 = 1$, par conséquent $u_k \geq 1$. On peut ainsi appliquer l'encadrement (*) avec $x = u_k$, on obtient :

$$\frac{1}{2u_k} \leq f(u_k) - u_k - 1 \leq \frac{e}{u_k},$$

sachant que $f(u_k) = u_{k+1}$ et en ajoutant 1 à chaque membre, on arrive à :

$$\boxed{1 + \frac{1}{2u_k} \leq u_{k+1} - u_k \leq 1 + \frac{e}{u_k}}.$$

(b) On somme chaque membre pour k allant de 0 à $n-1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2u_k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{e}{u_k}.$$

Par télescopage :

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_{k+1} - u_k = u_n - u_0 = u_n - 1,$$

Par linéarité :

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{1}{2u_k} = \sum_{k=0}^{n-1} 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2u_k} = n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k},$$

et de la même manière

$$\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{e}{u_k} = n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

En remplaçant on trouve que :

$$n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \leq u_n - 1 \leq n + e \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k}.$$

Or, on a vu que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n)$ en question 9-b), d'où

$$n + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - 1 \leq n + e \ln(u_n),$$

enfin en ajoutant $1 - n$ à chaque membre on conclut que :

$$1 + \frac{1}{2} \ln(u_n) \leq u_n - n \leq 1 + e \ln(u_n).$$

11. (a) On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissance comparée, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$.

(b) On divise l'encadrement de la question 10-b) par u_n :

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{2} \frac{\ln(u_n)}{u_n} \leq 1 - \frac{n}{u_n} \leq \frac{1}{u_n} + e \frac{\ln(u_n)}{u_n},$$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = 0$, ainsi les membres de droite et de gauche tendent vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Par le théorème des gendarmes, il vient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{n}{u_n} = 0$, soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{u_n} = 1$. Ceci montre que

$$u_n \sim n \text{ lorsque } n \text{ tend vers } +\infty.$$

12. On sait que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} = \ln(u_n).$$

Par ailleurs, pour n voisin de $+\infty$, on a $u_n = n + o(n)$ d'après la question précédente, d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} &= \ln(n + o(n)) \\ &= \ln(n \times (1 + o(1))) \\ &= \ln(n) + \ln(1 + o(1)) \\ &= \ln(n) + o(1) \quad (\text{car } \ln(1 + o(1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0) \end{aligned}$$

On en déduit que $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_k} \sim \ln(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2

1. Montrons que la famille (I, J, K) est libre. Soient $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} aI + bJ + cJ = 0 &\iff a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} a+c & b & b \\ b & a & c \\ b & c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} a=0 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi la famille (I, J, K) est libre. Comme elle engendre $\mathcal{E}$, on conclut que (I, J, K) est une base de $\mathcal{E}$ et $\dim(\mathcal{E}) = 3$.

2. Les matrices J et K sont symétriques donc diagonalisables.

3. (a) On trouve $J^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{2J}$.

- (b) D'après la question précédente $P(x) = x^3 - 2x$ est un polynôme annulateur de J . La factorisation :

$$P(x) = x^3 - 2x = x(x^2 - 2) = x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}),$$

montre que les racines de P sont $0, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Il s'ensuit que les valeurs propres de J sont des éléments de $\{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$.

4. (a) On a :

$$JU_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{2} \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} = \sqrt{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2}U_1 \quad \text{et} \quad JU_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

donc U_1 et U_2 sont des vecteurs propres de J respectivement associés aux valeurs propres $\sqrt{2}$ et 0 .

- (b) On résout le système $(J + \sqrt{2}I)X = 0$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} (J + \sqrt{2}I)X = 0 &\iff \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0 \\ x + \sqrt{2}y = 0 \\ x + \sqrt{2}z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0 \\ \sqrt{2}x + 2y = 0 \\ \sqrt{2}x + 2z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow \sqrt{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \sqrt{2}L_3 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0 \\ y - z = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{matrix} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{2}x + y + z = 0 \\ z = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\sqrt{2}y \\ z = y \end{cases} \\ &\iff X = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

On en déduit que $U_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de J associé à la valeur propre $\sqrt{2}$.

5. (a) La famille (U_1, U_2, U_3) est libre puisqu'elle est formée de vecteurs propres de J associés à des valeurs propres distinctes. Il s'agit d'une famille libre de trois vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, qui est lui-même de dimension trois, donc (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$.
- (b) On prend pour P la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ vers la base (U_1, U_2, U_3) . Cette matrice est inversible et ses colonnes correspondent aux matrices colonnes U_1, U_2, U_3 :

$$P = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. (a) Après calculs on trouve : $KU_1 = U_1$, $KU_2 = -U_2$ et $KU_3 = U_3$. Il en ressort que U_1, U_2 et U_3 sont des vecteurs propres de K respectivement associés aux valeurs propres 1, -1 et 1. Or on a déjà vu en 5-a) que (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$, donc (U_1, U_2, U_3) est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbf{R})$ formée de vecteurs propres de K .
- (b) Comme P est la matrice de passage de la base canonique dans la base (U_1, U_2, U_3) , les colonnes de la matrice $P^{-1}KP$ sont les matrices coordonnées de KU_1, KU_2 et KU_3 dans la base (U_1, U_2, U_3) :

$$P^{-1}KP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. (a) On développe :

$$P^{-1}MP = P^{-1}(aI + bJ + cK)P = aP^{-1}IP + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP = aI + bP^{-1}JP + cP^{-1}KP,$$

puis on remplace par les tableaux de nombres :

$$P^{-1}MP = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b\sqrt{2}+c & 0 & 0 \\ 0 & a-c & 0 \\ 0 & 0 & a-b\sqrt{2}+c \end{pmatrix}.$$

- (b) La matrice $P^{-1}MP$ étant diagonale, ses valeurs propres sont $a+b\sqrt{2}+c$, $a-c$ et $a-b\sqrt{2}+c$ (éventuellement avec répétition). Or, deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres, d'où

$$\text{Sp}(M) = \text{Sp}(P^{-1}MP) = \{a+b\sqrt{2}+c, a-c, a-b\sqrt{2}+c\}.$$

8. (a) On a :

$$s(I) = (1, 1, 1), \quad s(J) = (\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}) \quad \text{et} \quad s(K) = (1, -1, 1).$$

On en déduit :

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) On applique la méthode de Gauss à la matrice S :

$$\begin{array}{lll} 1. \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} & 2. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 & 3. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \\ 4. \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 & & \end{array}$$

On obtient une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls, il s'ensuit que la matrice S est inversible, et que l'application linéaire s est bijective.

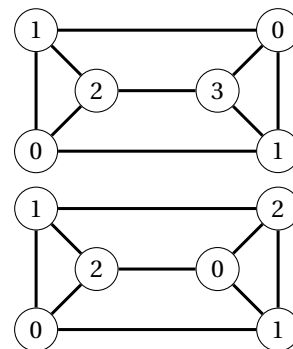
9.

```
def voisins(A,i):
    n = len(A[i])
    V = []
    for j in range(n):
        if j!= i and A[i,j]!= 0:
            V.append(j)
    return(V)
```
10.

```
def min_ext(L):
    m = 0
    while m in L:
        m = m + 1
    return(m)
```
11.

```
def coloration(A):
    n = len(A[0])
    C = [i for i in range(n)]
    for i in range(1,n):
        C_voisins = [C[j] for j in voisins(A,i)]
        C[i] = min_ext(C_voisins)
    return(C)
```

12. (a) En exécutant « coloration(A) » on obtient la liste [0,1,0,1,2,3], dont voici la coloration associée :
- (b) La réponse est oui, voici une coloration de G avec trois couleurs :



Exercice 3

1. (a) On sait que $U(\Omega) \in]0, 1]$, or :

$$\begin{aligned} 0 < U \leq 1 &\iff 0 < \sqrt{U} \leq 1 \\ &\iff \frac{1}{\sqrt{U}} \geq 1 \\ &\iff V \geq 1. \end{aligned}$$

Ainsi $V(\Omega) \subset [1, +\infty[$.

- (b) Si $x < 1$, alors $F_V(x) = P(V \leq x) = 0$, car $V(\Omega) \subset [1, +\infty[$.
Si $x \geq 1$, alors

$$F_V(x) = P(V \leq x) = P\left(\frac{1}{\sqrt{U}} \leq x\right) = P\left(U \geq \frac{1}{x^2}\right) = 1 - P\left(U < \frac{1}{x^2}\right) = \boxed{1 - \frac{1}{x^2}},$$

car $U \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$ et $\frac{1}{x^2} \in]0, 1]$.

- (c) On vérifie les points suivants :

- La fonction F_V est de classe C^1 sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$. En effet, F_V est constante sur $]-\infty, 1[$, et elle s'exprime comme somme de fonctions usuelles de classe C^1 sur $]1, +\infty[$.
- La fonction F_V est continue sur $\mathbf{R}$. D'après le point précédent, F_V est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{1\}$ car de classe C^1 sur cet ensemble. De plus,

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} F_V(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} F_V(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad F_V(1) = 0,$$

ce qui montre que F_V est continue en 1. Donc F_V est continue sur $\mathbf{R}$.

On en déduit que la variable aléatoire V admet une densité f_V définie par : $f_V(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$.

2. Espérance de V . L'intégrale $\int_{-\infty}^1 x f_V(x) dx$ converge absolument et est nulle car $f_V = 0$ sur $]1, +\infty[$. D'autre part, la fonction $x \mapsto x f_V(x)$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$, et

$$\int_1^A x f_V(x) dx = \int_1^A \frac{2}{x^2} dx = 2 \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A = 2 \left(1 - \frac{1}{A} \right) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} 2.$$

Ainsi l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x f_V(x) dx$ converge absolument et vaut 2, donc V admet une espérance et $E(V) = 2$.

Variance. On a :

$$\int_1^A x^2 f_V(x) dx = \int_1^A \frac{2}{x} dx = 2 [\ln(x)]_1^A = 2 \ln(A) \xrightarrow{A \rightarrow +\infty} +\infty.$$

On en déduit que V n'admet pas de moment d'ordre 2, par conséquent V n'admet pas de variance.

3. (a) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\begin{aligned} F_n(x) &= P(M_n \leq x) \\ &= P((V_1 \leq x) \cap \dots \cap (V_n \leq x)) \\ &= P(V_1 \leq x) \times \dots \times P(V_n \leq x) \quad (\text{par indépendance de } V_1, \dots, V_n) \\ &= (F_V(x))^n. \end{aligned}$$

- (b) Si $x < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 0^n = 0$.

$$\text{Si } x \geq 1, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} \right)^n = 0 \text{ car } 0 \leq 1 - \frac{1}{x^2} < 1.$$

Finalement on trouve $\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

- (c) Si la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 1}$ convergeait en loi vers une variable aléatoire M , alors sa fonction de répartition F_M serait donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad F_M(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(x) = 0.$$

Mais ceci est impossible car la fonction nulle n'est pas la fonction de répartition d'une variable aléatoire (elle n'admet pas 1 comme limite en $+\infty$). En conclusion, la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ ne converge en loi vers aucune variable aléatoire.

4. (a) On fixe $x > 0$. Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) &= P(M_n \leq x\sqrt{n}), \\ &= [F_V(x\sqrt{n})]^n. \end{aligned}$$

En supposant n suffisamment grand on a $x\sqrt{n} \geq 1$, et par suite

$$\begin{aligned} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) &= \left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)^n \\ &= e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{nx^2} = 0$ et $\ln(1+u) \sim u$ pour u voisin de 0, ainsi

$$\begin{aligned} \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{nx^2} \\ n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

On en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right) = -\frac{1}{x^2}$, ainsi par continuité de la fonction exp :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx^2}\right)} = e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

(b) Montrons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = F_W(x)$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.

- Soit $x \leq 0$, comme $M_n(\Omega) = [1, +\infty[$ on a $P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = P(M_n \leq \sqrt{n}x) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}} \leq x\right) = 0 = F_W(x).$$

- Soit $x > 0$, on a vu précédemment que $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} = F_W(x)$.

On en déduit que la suite $\left(\frac{M_n}{\sqrt{n}}\right)_{n \geq 1}$ converge en loi vers W .

5. (a) `SELECT montant FROM sinistres WHERE annee = 2024;`

(b) `SELECT mois, annee FROM sinistres WHERE montant > 1E6;`

6. `INSERT INTO sinistres VALUES (7652, 'avril', 2025, 1540);`

7. Comme $N \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on a $N(\Omega) = \mathbf{N}$ et $P(N = n) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

8. On sait que $N(\Omega) = \mathbf{N}$, or T peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et N , par conséquent $T(\Omega) = \mathbf{N}$.

9. (a) On regarde chaque sinistre comme une expérience de Bernoulli dont le succès est « le coût du sinistre dépasse A », de probabilité $P(V > A) = 1 - P(V \leq A) = \frac{1}{A^2}$. Ainsi, sous l'hypothèse $(N = n)$, la variable aléatoire T compte le nombre de succès parmi n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même probabilité de succès $\frac{1}{A^2}$, de ce fait $T \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$.

(b) On sait que la loi conditionnelle de T sachant $(N = n)$ est $\mathcal{B}\left(n, \frac{1}{A^2}\right)$, on en déduit :

- pour tout $k \in [0, n]$, $P_{(N=n)}(T = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}$,
- pour tout $k > n$, $P_{(N=n)}(T = k) = 0$.

10. Soit $k \in \mathbf{N}$, on applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'évènements $\{(N = n)\}_{n \in \mathbf{N}}$:

$$\begin{aligned} P(T = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(N = n) P_{(N=n)}(T = k) \\ &= \sum_{n=k}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k} \\ &= e^{-\lambda} \left(\frac{1}{A^2}\right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{A^2}\right)^{n-k}. \end{aligned}$$

On remarque que $\frac{\lambda^n}{n!} \binom{n}{k} = \frac{\lambda^n}{n!} \frac{n!}{k! (n-k)!} = \frac{1}{k!} \frac{\lambda^n}{(n-k)!}$, ainsi

$$P(T = k) = \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{A^2} \right)^k \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-k)!} \left(1 - \frac{1}{A^2} \right)^{n-k}.$$

On effectue maintenant le changement d'indice $m = n - k$:

$$\begin{aligned} P(T = k) &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{1}{A^2} \right)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^{m+k}}{m!} \left(1 - \frac{1}{A^2} \right)^m, \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{A^2} \right)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\lambda^m}{m!} \left(1 - \frac{1}{A^2} \right)^m, \\ &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{A^2} \right)^k \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{\left(\lambda - \frac{\lambda}{A^2} \right)^m}{m!}. \end{aligned}$$

On reconnaît une série exponentielle, d'où :

$$\begin{aligned} P(T = k) &= \frac{e^{-\lambda}}{k!} \left(\frac{\lambda}{A^2} \right)^k e^{\lambda - \frac{\lambda}{A^2}} \\ &= \boxed{\frac{e^{-\frac{\lambda}{A^2}}}{k!} \left(\frac{\lambda}{A^2} \right)^k}. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que T suit la loi de Poisson de paramètre $\frac{\lambda}{A^2}$.

11. En moyenne, on compte $E(T) = \frac{\lambda}{A^2}$ sinistres avec un coût supérieur à A en un an.

Fin du corrigé