Éléments de correction

Exercice 1 ....

1) a) On trouve (identification des coefficients des polynômes au numérateur) :

$$\frac{1}{4-x^2}=\frac{a}{2-x}+\frac{b}{2+x}\Leftrightarrow\begin{cases}a-b=0\\2a+2b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=b\\4b=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=\frac{1}{4}$$

b) On a $u_0=\frac{1}{4}\int_0^1\left(-\frac{-1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\right)\mathrm{d}x=[-\ln|2-x|+\ln|2+x|]_0^1=\frac{1}{4}\ln 3$.

2) On a $u_1=\int_0^1\frac{x}{4-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{-2x}{4-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\left[\ln\left|4-x^2\right|\right]_0^1=\ln\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3) a) On trouve : $4u_n-u_{n+2}=\int_0^1\frac{x^n\left(4-x^2\right)}{4-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$.

b) La première boucle permet de calculer les termes de rang pair de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et la deuxième boucle permet de calculer ceux de rang impair.

À chaque tour de boucle, quelle qu'elle soit, on calcule u_k avec la formule $u_k=4u_{k-2}-\frac{1}{k-1}$ donc on peut compléter les 2 lignes demandées ainsi :

```
u=4*u-1/(k-1)
u=4*u-1/(k-1)
```

4) a) Après quelques manipulations, on obtient $\frac{x^n}{4}\leq\frac{x^n}{4-x^2}\leq\frac{x^n}{3}$ et en intégrant de 0 à 1, bornes dans l'ordre croissant, on trouve bien : $\frac{1}{4(n+1)}\leq u_n\leq\frac{1}{3(n+1)}$

b) Par encadrement : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$.

c) On vient de voir que $\frac{1}{4(n+1)}\leq u_n$ or la série de terme général $\frac{1}{n+1}$ est divergente donc, grâce au critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général u_n est divergente.

5) a) D'après le graphique obtenu, la bonne conjecture est la ❸ : $u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{3n}$.

b) On obtient après IPP : $u_n=\left[\frac{x^{n+1}}{(n+1)\left(4-x^2\right)}\right]_0^1-\frac{2}{n+1}\int_0^1\frac{x^{n+2}}{\left(4-x^2\right)^2}\mathrm{d}x$

Après calcul du crochet, on a bien : $u_n = \dfrac{1}{3(n+1)} - \dfrac{2}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{d}x$

c) Après quelques manipulations, on obtient $\dfrac{x^n}{16} \leq \dfrac{x^n}{(4-x^2)^2} \leq \dfrac{x^n}{9}$, et en intégrant, bornes dans l'ordre croissant, on trouve : $\dfrac{1}{16}\times\dfrac{1}{n+3} \leq \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{9}\times\frac{1}{n+3}$

On conclut par encadrement : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{d}x = 0$

d) On a $3n u_n = \dfrac{3n}{3n+1} - \dfrac{6n}{n+1}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n+2}}{(4-x^2)^2}\,\mathrm{d}x$, ce qui donne : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 3n u_n = 1$.

On en déduit : $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{3n}$

Exercice 2 ....

1) a) On montre que f est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$.
Enfin, $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et pour tout $x \geq 0$, on a : $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x t\,\mathrm{e}^{-t^2/2}\mathrm{d}t = 1-\mathrm{e}^{-x^2/2}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1, d'où : $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1$.
Finalement, f peut être considérée comme densité d'une certaine variable X.

b) Si N est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite, alors son moment d'ordre 2 est $E(N^2)=1$.

c) On a aussi $E(N^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x = \sqrt{2\pi}$.

Par parité, on en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^2\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$ converge et vaut $\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Ainsi, $E(X)$ existe et $E(X) = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

2) Avec un calcul déjà fait, on a : $F_X(x) = \begin{cases} 1-\mathrm{e}^{-x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$.

3) a) Z ne prend que des valeurs positives ou nulles, d'où : $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ F_Z(x) = 0$.
Pour tout $x \geq 0$, on a : $F_Z(x) = F_X\left(\sqrt{x}\right) - F_X\left(-\sqrt{x}\right) = F_X\left(\sqrt{x}\right) = 1-\mathrm{e}^{-x/2}$

On voit que Z suit la loi exponentielle de paramètre $\dfrac{1}{2}$.

b) On a $X=\sqrt{Z}$ donc on peut proposer :

```
def simulX():
    Z=rd.exponential(2)
    X=np.sqrt(Z)
    return X
```

4) a) Par définition de la fonction de répartition, on a :

$$G_n(x)=P(Y_n\le x)=P\left(\frac{X}{\sqrt{n}}\le x\right)=F_X\left(x\sqrt{n}\right)$$

Si x est strictement négatif, $x\sqrt{n}$ l'est aussi et on a $P\left(X\le x\sqrt{n}\right)=0$.

Si x est positif, $x\sqrt{n}$ l'est aussi et on a $P\left(X\le x\sqrt{n}\right)=1-\mathrm{e}^{-\left(x\sqrt{n}\right)^2/2}=1-\mathrm{e}^{-nx^2/2}$.

Par conséquent, on obtient : $G_n(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-nx^2/2} & \text{si } x\ge 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$

b) Comme $G_n(0)=0$, on trouve assez vite : $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\le 0\\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$.

On reconnaît une fonction qui coïncide sauf en 0 avec la fonction de répartition G d'une variable certaine égale à 0 et comme 0 est un point de discontinuité de G, on peut conclure que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

c) Comme Y_n est une variable positive, on a :

$$P(|Y_n|>\varepsilon)=P(Y_n>\varepsilon)=1-G_n(\varepsilon)$$

D'après la question précédente, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(\varepsilon)=1$ (car $\varepsilon>0$) donc on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty}P(|Y_n|>\varepsilon)=0$$

5) a) Dire que la variable prenant la plus petite des valeurs prises par $X_1,\dots,X_n$ (il s'agit de M_n) prend une valeur strictement supérieure à x, c'est dire que chacune des variables $X_1,\dots,X_n$ a pris une valeur strictement supérieure à x (sinon M_n prendrait une valeur inférieure ou égale à x).

On a donc, pour tout réel x :

$$(M_n>x)=(X_1>x)\cap\dots\cap(X_n>x)$$

Par mutuelle indépendance de $X_1,\dots,X_n$, et comme $X_1,\dots,X_n$ suivent la même loi que X, on obtient : $P(M_n>x)=P(X_1>x)\times\dots\times P(X_n>x)=(1-F_X(x))^n$.

On en déduit $P(M_n\le x)=1-P(M_n>x)=1-(1-F_X(x))^n$ et, en remplaçant, on obtient :

$$P(M_n\le x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-nx^2/2} & \text{si } x\ge 0\\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

On reconnaît que la fonction de répartition de M_n est égale à G_n donc M_n suit la même loi que Y_n.

b) On peut proposer de remplir un vecteur contenant n simulations de X puis d'en prendre le minimum :

```
def simulM(n):
   X=np.array([simulX() for k in range(n)])
   M=np.min(X)
   return M
```

Exercice 3 ....

1) En effectuant le changement de variable $u = x-t$ qui est bien de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ dans l'intégrale de l'égalité (*), on obtient :

$$\int_0^x t\, f(x-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x (x-u)\, f(u)\,\mathrm{d}u$$

L'égalité (*) est donc équivalente à l'égalité :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + \int_0^x (x-u)\, f(u)\,\mathrm{d}u \qquad (**)$$

2) a) Par linéarité de l'intégration, une fonction f solution de ce problème vérifie donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 1 + x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x u\, f(u)\,\mathrm{d}u$.

Les fonctions $u \mapsto f(u)$ et $u \mapsto u\, f(u)$ sont continues sur $\mathbb{R}$ donc, en tant que primitives de ces fonctions, les fonctions $x \mapsto \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ et $x \mapsto \int_0^x u\, f(u)\,\mathrm{d}u$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto x$ est aussi de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, par opérations, f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ en tant que produit puis combinaison linéaire de telles fonctions.

En dérivant l'égalité $f(x) = 1 + x\int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u - \int_0^x u\, f(u)\,\mathrm{d}u$, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$$

b) Comme $x \mapsto \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, alors f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et, en dérivant l'égalité $f'(x) = \int_0^x f(u)\,\mathrm{d}u$, on trouve :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f''(x) = f(x)$$

c) L'équation caractéristique de l'équation différentielle ci-dessus est $r^2 = 1$ donc, d'après le cours, ses solutions sont les fonctions de la forme :

$$x \mapsto \lambda\, \mathrm{e}^x + \mu\, \mathrm{e}^{-x}$$

d) Par définition de f, on a $f(0) = 1 + \int_0^0 t\, f(-t)\,\mathrm{d}t = 1$ et, d'après la question 2a), on a $f'(0) = \int_0^0 f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

Comme $f(x)=\lambda e^{x}+\mu e^{-x}$, on a $f'(x)=\lambda e^{x}-\mu e^{-x}$ et on obtient $\begin{cases}\lambda+\mu=1\\ \lambda-\mu=0\end{cases}$,

soit : $\lambda=\mu=\dfrac{1}{2}$.

En conclusion, si f est une solution du problème posé, on a :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}$$

Ceci prouve que le problème posé au début de cet exercice a au plus une solution qui est la fonction f définie par : $\forall x\in\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}$

3) Synthèse :

- On a : $\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x \dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}\,dt=\left[\dfrac{e^{t}-e^{-t}}{2}\right]_0^x=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}$.

- Pour le calcul de $\int_0^x t\,f(t)\,dt=\int_0^x t\dfrac{e^{t}+e^{-t}}{2}\,dt$, on trouve avec une intégration par parties :

$$\int_0^x t\,f(t)\,dt=\left[t\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\right]_0^x-\int_0^x\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}\,dt=x\times\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}-\left[\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}\right]_0^x$$

On a alors : $\int_0^x t\,f(t)\,dt=x\times\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}-\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}+1$.

- Pour finir, on trouve bien, après un petit calcul :

$$1+x\int_0^x f(t)\,dt-\int_0^x t\,f(t)\,dt=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=f(x)$$

Effectivement, la fonction f trouvée à la question 2d) est solution du problème proposé en début d'exercice donc c'est la seule solution de ce problème.

4) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant l'égalité :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=\int_0^x t\,f(x-t)\,dt$$

Comme dans les questions précédentes, on montre que, pour tout réel x, on a :

$$f(x)=\lambda e^{x}+\mu e^{-x}$$

À la différence de la question 2d), on a cette fois $f(0)=0$ et $f'(0)=0$, ce qui donne $\lambda=\mu=0$. On voit alors que f est la fonction nulle dont il est facile de vérifier qu'elle est solution de ce nouveau problème.

Problème...

1) a) Au départ, l'urne A contient une boule blanche donc $a_0=0$, $b_0=1$, $c_0=0$.

b) • Comme l'urne A contient 1 boule blanche et 1 boule noire, la seule façon qu'elle contienne 2 boules noires (donc aucune boule blanche) après l'épreuve suivante est d'échanger la boule blanche de A avec la boule noire de B, ce qui se fait avec la probabilité $\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$. On a donc $P(X_1=0)=\frac{1}{4}$

- Pour avoir encore 1 boule blanche et 1 boule noire à l'étape suivante, il faut, soit piocher une boule blanche dans chacune des deux urnes (probabilité égale à $\frac{1}{4}$), soit piocher une boule noire dans chacune des deux urnes (probabilité égale à $\frac{1}{4}$). Par incompatibilité, on trouve :

$$P(X_1=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

- De la même façon que pour $P(X_1=0)=\frac{1}{4}$, on trouve : $P(X_1=2)=\frac{1}{4}$

On a donc : $a_1=\frac{1}{4}$, $b_1=\frac{1}{2}$ et $c_1=\frac{1}{4}$

c) Les événements $(X_n=0)$, $(X_n=1)$, $(X_n=2)$ sont, par nature, deux à deux incompatibles et leur réunion est égale à Ω puisqu'il y a, en tout, deux boules blanches, donc le nombre de boules blanches présentes dans A ne peut qu'être égal à 0, à 1 ou à 2. En conclusion, $\big((X_n=0),(X_n=1),(X_n=2)\big)$ est un système complet d'événements.

d) D'après ce qui précède, on a : $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n+b_n+c_n=1$

2) a) On a :

- $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=1)=1$ car si l'urne A ne contient aucune boule après la n^{e} épreuve, elle contiendra, à coup sûr, une boule blanche après l'épreuve suivante.

On en déduit : $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=0)=0$ et $P_{(X_n=0)}(X_{n+1}=2)=0$.

- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=0)=\frac{1}{4}$ car si l'urne A contient 1 boule blanche et 1 boule noire après la n^{e} épreuve, la seule façon qu'elle contienne 2 boules noires (donc aucune boule blanche) après l'épreuve suivante est d'échanger la boule blanche de A avec la boule noire de B, ce qui se fait avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

On trouve symétriquement : $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=2)=\frac{1}{4}$.

- $P_{(X_n=1)}(X_{n+1}=1)=\frac{1}{2}$ car si l'urne A contient 1 boule blanche et 1 boule noire après la n^{e} épreuve, alors, pour avoir encore 1 boule blanche et 1 boule noire à l'étape suivante, il faut, soit piocher une boule blanche dans chacune des deux urnes (probabilité égale à $\frac{1}{4}$), soit piocher une boule noire dans chacune des deux urnes (probabilité égale à $\frac{1}{4}$).

Par incompatibilité, on trouve : $P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=1\right)=\frac{1}{2}$.

- $P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=1\right)=1$ car si l'urne A contient 2 boules blanches après la n^{e} épreuve, il est certain qu'elle contiendra une seule boule blanche après l'épreuve suivante puisqu'il y aura échange d'une boule blanche de A avec une noire de B.

On en déduit : $P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=2\right)=0$ et $P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=0\right)=0$.

Le graphe proposé est bien celui qui représente la chaîne de Markov proposée.

b) Les valeurs de ces probabilités conditionnelles assurent que :

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) On utilise trois fois la formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $\left((X_n=0),(X_n=1),(X_n=2)\right)$:

- $P\left(X_{n+1}=0\right)=P\left(X_n=0\right)P_{(X_n=0)}\left(X_{n+1}=0\right)+P\left(X_n=1\right)P_{(X_n=1)}\left(X_{n+1}=0\right)$
$+P\left(X_n=2\right)P_{(X_n=2)}\left(X_{n+1}=0\right)$

En remplaçant les probabilités conditionnelles, on obtient :

$$P\left(X_{n+1}=0\right)=\frac{1}{4}P\left(X_n=1\right)$$

- On a de la même façon : $P\left(X_{n+1}=1\right)=P\left(X_n=0\right)+\frac{1}{2}P\left(X_n=1\right)+P\left(X_n=2\right)$.
- Pour finir : $P\left(X_{n+1}=2\right)=\frac{1}{4}P\left(X_n=1\right)$.

En réécrivant les trois relations précédentes, on obtient :

$$\begin{cases} a_{n+1}=\frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n+c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{4}b_n \end{cases}$$

3) Si $n=0$, ceci donne $\begin{cases} a_1=\frac{1}{4}b_0=\frac{1}{4} \\ b_1=a_0+\frac{1}{2}b_0+c_0=\frac{1}{2} \\ c_1=\frac{1}{4}b_0=\frac{1}{4} \end{cases}$, ce qui est correct d'après 1b).

4) a) On a, par définition :

$$E\left(X_{n+1}\right)=0\times P\left(X_{n+1}=0\right)+1\times P\left(X_{n+1}=1\right)+2\times P\left(X_{n+1}=2\right)=b_{n+1}+2c_{n+1}$$

b) Grâce à la question 2c), on a, pour tout entier naturel n :

$$b_{n+1}+2c_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n+c_n+\frac{1}{2}b_n=a_n+b_n+c_n=1$$

On en déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a $E\left(X_{n+1}\right)=1$.

c) Comme on a aussi $E\left(X_0\right)=1=b_0+2c_0$, alors : $\forall n\in\mathbb{N},\ b_n+2c_n=1$

5) a) On trouve $U_n V=2a_n-b_n+2c_n$.
Mais, toujours d'après la question 2c), on a aussi :

$$U_{n+1} V=2a_{n+1}-b_{n+1}+2c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n-\left(a_n+\frac{1}{2}b_n+c_n\right)+\frac{1}{2}b_n$$

On en déduit que $U_{n+1} V=-\frac{1}{2}U_n V$, ce qui prouve que la suite $\left(U_n V\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

b) Avec le cours sur les suites géométriques et comme $U_0 V=-1$, on obtient $U_n V=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$, ce qui donne : $\forall n\in\mathbb{N},\ 2a_n-b_n+2c_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

6) Avec les questions 1b), 4c) et 5b), on a :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \begin{cases} a_n+b_n+c_n=1 & \mathrm{L}_1 \\ b_n+2c_n=1 & \mathrm{L}_2 \\ 2a_n-b_n+2c_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n & \mathrm{L}_3 \end{cases}$$

Avec l'opération élémentaire $L_1\leftarrow L_1-L_2$, on a le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} a_n=c_n \\ b_n=1-2c_n \\ 2a_n-b_n+2c_n=-\left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{cases}$$

En remplaçant a_n et b_n dans la troisième équation, on obtient :

$$a_n=c_n=\frac{1}{6}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

On en déduit :

$$b_n=1-2\times\frac{1}{6}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)=1-\frac{1}{3}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{3}\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

En revenant à la variable aléatoire X_n, on a :

$$P\left(X_n=0\right)=\frac{1}{6}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

$$P\left(X_n=1\right)=\frac{1}{3}\left(2+\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

$$P\left(X_n=2\right)=\frac{1}{6}\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

7) $-\frac{1}{2} \in]-1,1[$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=0) = \lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=2) = \frac{1}{6}$, $\lim\limits_{n\to+\infty} P(X_n=1) = \frac{2}{3}$.

Par conséquent, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en loi vers la variable X dont la loi est donnée par : $P(X=0)=\frac{1}{6}$, $P(X=1)=\frac{2}{3}$ et $P(X=2)=\frac{1}{6}$.

8) a) On trouve $M^2 = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ et $M^3 = \begin{pmatrix} 1/8 & 3/4 & 1/8 \\ 3/16 & 5/8 & 3/16 \\ 1/8 & 3/4 & 1/8 \end{pmatrix}$.

On constate que l'on a bien : $2M^3 = M^2 + M$.

b) D'après ce qui précède, le polynôme P défini par $P(x) = 2x^3 - x^2 - x$ est un polynôme annulateur de la matrice M.

Comme les racines de P sont $-\frac{1}{2}$, 0 et 1, alors les valeurs propres possibles de M sont $-\frac{1}{2}$, 0 et 1.

Il reste à tester ces potentielles valeurs propres.

$$\bullet\ MX = -\frac{1}{2}X \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = -\frac{1}{2}y \\ y = -\frac{1}{2}z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y \\ -\frac{1}{2}y + y - \frac{1}{2}y = 0 \\ z = -2y \end{cases} \Leftrightarrow X = -y\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ce système a des solutions non nulles donc $-\frac{1}{2}$ est valeur propre de M et de plus, le sous-espace propre associé est $E_{-\frac{1}{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ n'est pas nul donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{-\frac{1}{2}}$.

$$\bullet\ MX = 0X \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On trouve ici $E_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas nul donc la famille $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_0.

• $MX = 1X \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = y \\ y = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On trouve donc : $E_1 = \text{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$.

Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ n'est pas nul donc la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de E_1.

c) Les trois sous-espaces propres de M sont associés à des valeurs propres distinctes donc la concaténation des bases de ces trois sous-espaces propres forme une famille libre de 3 vecteurs de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Comme $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 3, cette famille est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Par conséquent, P est inversible en tant que matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ à cette nouvelle base de vecteurs propres.

d) On trouve $MP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $PD = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $MP = PD$, et comme P est inversible, on en déduit $M = PDP^{-1}$, ce qui signifie que M est diagonalisable.

e) Les trois égalités de 2c) s'écrivent : $\begin{cases} a_{n+1} = 0 \times a_n + \frac{1}{4} \times b_n + 0 \times c_n \\ b_{n+1} = 1 \times a_n + \frac{1}{2} \times b_n + 1 \times c_n \\ c_{n+1} = 0 \times a_n + \frac{1}{4} \times b_n + 0 \times c_n \end{cases}$.

Matriciellement, ceci s'écrit : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} = U_n M$

f) On procède par récurrence :

- Pour $n = 0$, on a $U_0 M^0 = U_0 I = U_0$: l'initialisation est ainsi faite.
- Si l'on suppose, pour un certain entier naturel n, que $U_n = U_0 M^n$, alors :

$$U_{n+1} = U_n M = \left(U_0 M^n\right) M = U_0 \left(M^n M\right) = U_0 M^{n+1}$$

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = U_0 M^n$

g) Comme $M = PDP^{-1}$, une récurrence permet d'avoir $M^n = PD^nP^{-1}$, ce qui permet d'expliciter M^n après calcul de P^{-1}, puis d'en déduire, avec $U_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, l'expression de $U_n = U_0 M^n$, ce qui donne la loi de X_n.