Éléments de correction

Exercice 1 ....

1) On obtient :

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\1&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$$

2) a) Les chaînes cherchées sont :

2-1-0-3   2-1-2-3   2-3-0-3   2-3-2-3   2-3-4-3

b) D'après le cours, il faut donner à k la valeur 3 puis compléter de la façon suivante :

```
B=f(A,3)
n=B[2,3]
print(n)
```

3) a) On a $D=\begin{pmatrix}2&0&0&0&0\\0&2&0&0&0\\0&0&2&0&0\\0&0&0&3&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

b) Comme $L=D-A$, on trouve bien $L=\begin{pmatrix}2&-1&0&-1&0\\-1&2&-1&0&0\\0&-1&2&-1&0\\-1&0&-1&3&-1\\0&0&0&-1&1\end{pmatrix}$.

c) La matrice L est symétrique donc elle est diagonalisable.

4) a) ${}^tXLX \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ donc on peut considérer ${}^tX\,LX$ comme un réel.

b) On trouve ${}^tX\,LX = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2a-b-d \\ -a+2b-c \\ -b+2c-d \\ -a-c+3d-e \\ -d+e \end{pmatrix}$.

En effectuant et arrangeant, on trouve :

$${}^tX\,LX = 2a^2+2b^2+2c^2+3d^2+e^2-2ab-2ad-2bc-2cd-2de$$

Par ailleurs, on a, toujours en développant :

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(e-d)^2 = 2a^2+2b^2+2c^2+3d^2+e^2$$
$$-2ab-2ad-2bc-2cd-2de$$

On reconnaît l'expression de ${}^tX\,LX$ donc finalement :

$${}^tX\,LX = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(e-d)^2$$

c) Si X est un vecteur propre de L associé à une certaine valeur propre λ, alors $LX = \lambda X$ et ${}^tX\,LX = {}^tX(\lambda X) = \lambda\,{}^tX\,X = \lambda\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right)$.

On obtient donc :

$$\lambda\left(a^2+b^2+c^2+d^2+e^2\right) = (a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(e-d)^2$$

La quantité $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ est positive ou nulle comme somme de carrés. De plus, X est un vecteur propre de L donc $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2>0$.
Ainsi, on peut diviser par $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ qui est différent de 0, d'où :

$$\lambda = \frac{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(e-d)^2}{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}$$

Ainsi, λ est positif, ce qui prouve que les valeurs propres de L sont positives ou nulles.

d) On trouve $LU = 0$. Comme U est non nul, ceci montre que 0 est valeur propre de L (associée au vecteur propre U) et comme les valeurs propres de L sont positives et dans l'ordre $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4 \le \lambda_5$, on est sûr que $\lambda_1 = 0$.

5) a) Première méthode (résolution du système) :
Avec la matrice L donnée à la question 3b), on a :

$$LX = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d'où :}$$

$$LX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-d=0 \\ -a+2b-c=0 \\ -b+2c-d=0 \\ -a-c+3d-e=0 \\ -d+e=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-d=0 \\ -a+2b-c=0 \\ -b+2c-d=0 \\ -a-c+3d-d=0 \\ e=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-d=0 \\ -a+2b-c=0 \\ -b+2c-d=0 \\ -a-c+2d=0 \\ e=d \end{cases}$$

$$LX=0 \Leftrightarrow \overset{L_4\leftarrow L_4-L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2a-b-d=0 \\ -a+2b-c=0 \\ -b+2c-d=0 \\ 2d-2b=0 \\ e=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b-d=0 \\ -a+2b-c=0 \\ -b+2c-d=0 \\ d=b \\ e=d \end{cases}$$

En substituant avec $d=b$:

$$LX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b=0 \\ -a+2b-c=0 \\ 2c-2b=0 \\ d=b \\ e=d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=c \\ b=c \\ d=b \\ e=d \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=d=e \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}=aU .$$

On a donc : $LX=0 \Leftrightarrow X \in \operatorname{Vect}(U)$

Deuxième méthode (avec la question 4b) :

- On sait déjà, comme vu à la question 4d), que $X \in \operatorname{Vect}(U) \Rightarrow LX=0$.
- D'autre part, $LX=0 \Rightarrow {}^tX(LX)={}^tX\times 0=0$. On en déduit, d'après la question 4b), que $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2+(d-a)^2+(e-d)^2=0$.

On obtient donc $a=b=c=d=e$, ce qui signifie que $X=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a \\ a \\ a \end{pmatrix}=aU$, c'est-à-dire : $X \in \operatorname{Vect}(U)$.

Les deux points précédents donnent l'équivalence demandée.

b) Le résultat précédent prouve que le sous-espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1=0$ est $\operatorname{Vect}(U)$, qui est de dimension 1 puisque U n'est pas nul.

Si l'une au moins des autres valeurs propres λ_2, λ_3, λ_4, λ_5 était nulle, la matrice diagonale semblable à L contiendrait au moins deux termes nuls sur la diagonale, ce qui voudrait dire que le sous-espace propre associé à la valeur propre 0 serait de dimension au moins égale à 2, ce qui n'est pas le cas.

Ainsi, λ_2, λ_3, λ_4 et λ_5 sont des réels strictement positifs.

Exercice 2 ....

1) La fonction nulle est un bon exemple.

2) Si l'on fixe y (quelconque) et que l'on considère x comme variable, alors on a par encadrement $\lim_{x \to y} |f(x) - f(y)| = 0$, ce qui signifie : $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$.
Par définition, f est continue en *y*, donc continue sur $\mathbb{R}$.

3) Si l'équation $f(x) = x$ avait deux solutions distinctes x_1 et x_2, on aurait, avec la relation (*), $|f(x_1) - f(x_2)| \leq K \times |x_1 - x_2|$, ce qui donnerait $(1-K)|x_1 - x_2| \leq 0$.
Cette inégalité est impossible puisque $1 - K > 0$ et $|x_1 - x_2| > 0$.
Ainsi, l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

4) a) • Pour $n = 0$, l'inégalité cherchée s'écrit $|u_1 - u_0| \leq K^0 \times |u_1 - u_0|$, ce qui est vrai car $K^0 = 1$.

• Soit n un entier naturel tel que $|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \times |u_1 - u_0|$.
Comme $K > 0$, on obtient :

$$|f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq K|u_{n+1} - u_n| \leq K^{n+1} \times |u_1 - u_0|$$

On a donc $|u_{n+2} - u_{n+1}| \leq K^{n+1} \times |u_1 - u_0|$, ce qui termine l'hérédité.

• On a bien montré par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$\boxed{|u_{n+1} - u_n| \leq K^n \times |u_1 - u_0|}$$

b) La série de terme général $K^n \times |u_1 - u_0|$ est une série géométrique de raison K élément de $]-1,1[$. De ce fait, cette série est convergente et grâce au critère de comparaison pour les séries à termes positifs, la série de terme général $|u_{n+1} - u_n|$ converge également, et ainsi, la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est convergente.
Ensuite, pour tout entier naturel n non nul, on a par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k)$$

La somme du membre de droite possède une limite finie donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente.

c) Comme la fonction f est continue en a, on a : $f(a) = a$.
On peut donc conclure que l'équation $f(x) = x$ admet a comme solution, mais comme elle admet au plus une solution, on est sûr que a est la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

5) a) En sommant l'inégalité $\left|u_{i+1}-u_i\right| \leq K^i \times \left|u_1-u_0\right|$, obtenue à la question 4b), pour i allant de n à $n+p-1$ (donc avec $p \geq 1$), on obtient :

$$\boxed{\sum_{i=n}^{n+p-1} \left|u_{i+1}-u_i\right| \leq \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i \times \left|u_1-u_0\right|}$$

b) Comme $K \neq 1$, on peut calculer la somme de droite, ce qui donne :

$$\sum_{i=n}^{n+p-1} \left|u_{i+1}-u_i\right| \leq K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} \left|u_1-u_0\right|$$

Avec l'inégalité triangulaire, on peut écrire :

$$\left|\sum_{i=n}^{n+p-1} \left(u_{i+1}-u_i\right)\right| \leq K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} \left|u_1-u_0\right|$$

On obtient alors, pour tout entier naturel n et tout entier naturel $p \geq 1$:

$$\boxed{\left|u_{n+p}-u_n\right| \leq K^n \times \frac{1-K^p}{1-K} \left|u_1-u_0\right|}$$

c) On peut faire tendre p vers $+\infty$ sans risque et on obtient :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \left|a-u_n\right| \leq \frac{K^n}{1-K} \times \left|u_1-u_0\right|}$$

6) a) On a $f(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$ donc f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ comme quotient bien défini de fonctions de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. De plus, on trouve :

$f'(t) = \dfrac{-\mathrm{e}^t}{\left(1+\mathrm{e}^t\right)^2}$ puis $f''(t) = \dfrac{\mathrm{e}^t\left(\mathrm{e}^t-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^t\right)^3}$.

b) On a donc $f''(t) \leq 0$ si $t \leq 0$ et $f''(t) \geq 0$ si $t \geq 0$.

On en déduit que f' est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc elle admet un minimum en 0 qui vaut $f'(0) = \dfrac{-1}{4}$.

Comme $f'(t) < 0$, on a l'encadrement : $-\dfrac{1}{4} \leq f'(t) < 0$.

On peut prolonger cet encadrement en :

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \left|f'(t)\right| \leq \frac{1}{4}}$$

c) La fonction f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et on peut lui appliquer l'inégalité des accroissements finis entre deux réels quelconques x et y, ce qui donne :

$$\left|f(x)-f(y)\right| \leq \frac{1}{4}|x-y|$$

En conclusion, f est $\frac{1}{4}$-contractante.

d) Comme f est $\frac{1}{4}$-contractante, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

e) On peut proposer :

```
u=0
for k in range(1,n+1):
    u=1/(1+np.exp(u))
```

f) Comme $u_0=0$, alors $u_1=f(u_0)=f(0)=\frac{1}{2}$, et l'inégalité établie à la question 5c) devient $|a-u_n| \leq \frac{4}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{2}$, ce qui donne : $|a-u_n| \leq \frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$.
On voit alors que l'erreur $|a-u_n|$ faite en approchant a par u_n est inférieure ou égale à 10^{-3} dès que $\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \leq 10^{-3}$, soit : $4^n \geq 2000/3$.

g) On peut proposer le programme suivant :

```
n=0
while 4**n<2000/3:
    n=n+1
print('une valeur approchée de a est', suite(n))
```

Exercice 3 ....

1) a) Comme $A-\lambda I = \begin{pmatrix} a-\lambda & 1 \\ 0 & b-\lambda \end{pmatrix}$, les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = a$ et $\lambda_2 = b$. Par conséquent, si $a=b$, A ne possède qu'une valeur propre.

b) Si A était diagonalisable avec comme seule valeur propre a, elle serait semblable à la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = aI$ donc égale à aI, ce qui est faux. On peut conclure que A n'est pas diagonalisable.

2) a) Avec $a \neq b$, le même raisonnement que celui de la question 1a) permet d'affirmer que a et b sont les deux valeurs propres de A.

b) On trouve $A\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $A\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$.

Comme $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ ne sont pas nuls, les égalités précédentes prouvent que les vecteurs $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}$ sont vecteurs propres de A respectivement associés aux valeurs propres a et b.

c) Comme $b-a \neq 0$, la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\b-a\end{pmatrix}\right)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Comme $\dim \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) = 2$, c'est donc une base de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
La matrice P demandée est par définition :

$$P = \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & b-a\end{pmatrix}$$

d) On a $AP = \begin{pmatrix}a & b\\0 & b(b-a)\end{pmatrix}$.

Par ailleurs, avec $D = \begin{pmatrix}x & 0\\0 & y\end{pmatrix}$, on a $PD = \begin{pmatrix}x & y\\0 & y(b-a)\end{pmatrix}$ donc, en prenant $D = \begin{pmatrix}a & 0\\0 & b\end{pmatrix}$, on a bien $AP = PD$. Pour finir, la matrice P est inversible en tant que matrice de changement de base donc, en multipliant les deux membres de l'égalité $AP = PD$ par P^{-1} à droite, on obtient $APP^{-1} = PDP^{-1}$, c'est-à-dire $A = PDP^{-1}$, ce qui signifie que A est diagonalisable.

3) a) La formule des probabilités totales associée au système complet d'événements $(Y=n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ s'écrit :

$$P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X=Y]\cap[Y=n]) = \sum_{n=1}^{+\infty} P([X=n]\cap[Y=n])$$

Comme X et Y sont indépendantes, on obtient :

$$\boxed{P(X=Y) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X=n)P(Y=n)}$$

b) Les variables aléatoires X et Y suivent la même loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ donc $P(X=n) = P(Y=n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.
En remplaçant, on obtient :

$$P(X=Y)=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

On trouve alors :

$$\boxed{P(X=Y)=\frac{1}{3}}$$

4) a) La matrice $A(X,Y)$ n'est pas diagonalisable si, et seulement si, $X=Y$.

Ainsi, la probabilité p pour que $A(X,Y)$ ne soit pas diagonalisable vaut $\frac{1}{3}$.

b) En fin de boucle le contenu de la variable `c` est le nombre de fois où l'événement $(X=Y)$ a été réalisé lors d'un grand nombre `m` d'épreuves. Le quotient `c/m` est donc la fréquence d'apparition de l'événement $(X=Y)$ lors de ces `m` épreuves. Pour finir, `i=1-c/m` est la fréquence d'apparition de l'événement $(X\neq Y)$. Pour de grandes valeurs de l'entier naturel m, le contenu de `i` est une valeur approchée de $P(X\neq Y)$. Par conséquent, le contenu de `i` est proche de $\frac{2}{3}$.

Problème...

Partie 1 : une propriété des lois de Pareto

1) • La fonction *f* est positive sur $]-\infty,1[$ car elle y est nulle, elle est bien définie et positive sur $[1,+\infty[$ comme inverse d'une fonction strictement positive (car c est strictement positif et $x^{c+1}\geq 1>0$).

• La fonction *f* est continue sur $]-\infty,1[$ car elle y est nulle, elle est aussi continue sur $]1,+\infty[$ comme inverse d'une fonction puissance continue (avec dénominateur non nul), ainsi *f* est continue sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en 1.

• $\int_{-\infty}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t=0$ car *f* est nulle sur $]-\infty,1[$.

Pour tout $x\geq 1$, on a :

$$\int_1^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_1^x \frac{c}{t^{1+c}}\,\mathrm{d}t=c\int_1^x t^{-1-c}\,\mathrm{d}t \underset{\downarrow}{\overset{c\neq 0}{=}} c\left[\frac{t^{-c}}{-c}\right]_1^x=\left[-t^{-c}\right]_1^x=-x^{-c}+1=1-\frac{1}{x^c}$$

Comme $c>0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^c}=0$ donc $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et, après passage à la limite, on a $\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$. Finalement, on obtient : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t=1$.

En conclusion, f peut être considérée comme densité d'une certaine variable aléatoire *X*.

2) Par définition, on a : $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

- $\forall x<1,\ F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t=0$.
- $\forall x\geq 1,\ F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t+\int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=1-x^{-c}=1-\dfrac{1}{x^c}$.

Bilan :

$$\boxed{F(x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^c} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}}$$

3) a) Tout d'abord, on a $P(X>t)\neq 0$ car $t>1$ donc on peut effectivement considérer la probabilité $P_{(X>t)}(X\leq tx)$.

- Si $x=1$, la probabilité demandée est nulle et si $x>1$, on a :

$$P_{(X>t)}(X\leq t\,x)=\frac{P([X>t]\cap[X\leq t\,x])}{P(X>t)}\overset{\overset{t<t\,x}{\downarrow}}{=}\frac{P(t<X\leq t\,x)}{P(X>t)}$$

On obtient alors : $P_{(X>t)}(X\leq t\,x)=\dfrac{F(t\,x)-F(t)}{1-F(t)}$, valable aussi pour $x=1$.

Comme t est supérieur ou égal à 1, on a $F(t)=1-\dfrac{1}{t^c}$.

Comme $x\geq 1$, on a aussi $t\,x\geq 1$, et ainsi :

$$F(t\,x)=1-\frac{1}{(t\,x)^c}=1-\frac{1}{t^c x^c}$$

On obtient :

$$\forall x\geq 1,\ P_{(X>t)}(X\leq t\,x)=1-\frac{1}{x^c}$$

- Si $x<1$, on a $t\,x\leq t$ (car t est positif), d'où $(X\leq t\,x)\subset(X\leq t)$ et ainsi, l'intersection $[X>t]\cap[X\leq t\,x]$ est vide donc $P([X>t]\cap[X\leq t\,x])=0$, et finalement :

$$P_{(X>t)}(X\leq t\,x)=0$$

En résumé :

$$\boxed{P_{(X>t)}(X\leq t\,x)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^c} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}}$$

b) En divisant par $t>0$, on obtient : $P_{(X>t)}\left(\dfrac{X}{t}\leq x\right)=\begin{cases}1-\dfrac{1}{x^c} & \text{si } x\geq 1\\ 0 & \text{si } x<1\end{cases}$.

Ainsi, la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X>t)$, est la loi de X.

Partie 2 : étude de la réciproque

4) Par définition, on a $G(1)=\int_{-\infty}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t$ et comme g est nulle sur $]-\infty,1[$, on peut conclure :

$$\boxed{G(1)=0}$$

5) a) On a $P_{(Y>t)}\left(\dfrac{Y}{t}\le x\right)=P_{(Y>t)}(Y\le t\,x)$. Dès lors, comme à la question 3a), on obtient l'égalité valable pour tout $x\ge 1$:

$$P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t}\le x\right)=\frac{G(t\,x)-G(t)}{1-G(t)}$$

Comme, pour tout réel t supérieur ou égal à 1, la loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y>t)$, est la loi de *Y*, on déduit :

$$\boxed{\forall x>1,\ \forall t\ge 1,\ G(x)=\frac{G(t\,x)-G(t)}{1-G(t)}}$$

b) g est continue sur $]1,+\infty[$ donc G est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ et, en dérivant la relation précédente par rapport à x, on obtient :

$$\forall x\in\,]1,+\infty[,\ \forall t\ge 1,\ G'(x)=\frac{t\,G'(t\,x)}{1-G(t)}$$

c) Comme g et G' coïncident sur $]1,+\infty[$, alors en faisant tendre x vers 1^+, on a $\lim\limits_{x\to 1^+} G'(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=g(1)=c$ (car *g* est continue à droite en 1), et comme $tx>1$, on peut écrire :

$$\lim_{x\to 1^+} G'(tx)=\lim_{x\to 1^+} g(tx)=g(t)=G'(t)$$

On obtient donc, pour tout $t>1$, $c\big(1-G(t)\big)=t\,G'(t)$ et en divisant par c qui n'est pas nul, on obtient bien :

$$\boxed{\forall t>1,\ G(t)+\frac{t}{c}G'(t)=1}$$

6) a) La fonction z est de classe C^1 sur $]1,+\infty[$ en tant que produit de fonctions de classe C^1 sur $]1,+\infty[$. De plus, on a :

$$\forall t \in \left]1,+\infty\right[,\ z'(t) = t^{c-1}(c\,y(t) + t\,y'(t))$$

On trouve alors, pour tout t de $\left]1,+\infty\right[$:

$$y(t) + \frac{t}{c}y'(t) = 0 \Leftrightarrow z'(t) = 0$$

Ainsi, y est solution de (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $\left]1,+\infty\right[$.

b) En notant K cette constante, on a $z(t) = K$, d'où :

$$\boxed{\forall t > 1,\ y(t) = \frac{K}{t^c}}$$

c) La fonction constante u égale à 1 est solution évidente de (E_2).

d) • Si h est solution de (E_2), alors $h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = 1$, mais comme on a aussi $u(t) + \frac{t}{c}u'(t) = 1$, alors $(h-u)(t) + \frac{t}{c}(h-u)'(t) = 0$. Ceci prouve que $h-u$ est solution de (E_1).

- Réciproquement :

Si $h-u$ est solution de (E_1), alors on a :

$$(h-u)(t) + \frac{t}{c}(h-u)'(t) = 0$$

On trouve par linéarité de la dérivation : $h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = u(t) + \frac{t}{c}u'(t)$.

Comme $u(t) + \frac{t}{c}u'(t) = 1$, on obtient $h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = 1$, ce qui montre que h est solution de (E_2).

En conclusion, on a l'équivalence : h solution de (E_2) $\Leftrightarrow$ $h-u$ solution de (E_1).

e) Par conséquent, h est solution de (E_2) si et seulement si :

$$\forall t > 1,\ (h-u)(t) = \frac{K}{t^c}$$

On en déduit que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\boxed{\forall t > 1,\ h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}}$$

7) a) Comme G est continue en 1, on a $\lim\limits_{t \to 1^+} G(t) = G(1) = 0$ donc on doit prendre $K = -1$. En conclusion :

$$\boxed{\forall t \in \,]1,+\infty[\,,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}}$$

b) Avec $t = 1$, ceci donne $G(1) = 0$, ce qui est correct donc on peut prolonger :

$$\boxed{\forall t \in [1,+\infty[\,,\ G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}}$$

Comme g est nulle sur $]-\infty,1[$, alors G est également nulle sur ce même intervalle. On a donc :

$$G(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{t^c} & \text{si } t \geq 1 \\ 0 & \text{si } t < 1 \end{cases}$$

Ceci prouve que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8) a) Pour tout réel x, on a : $H(x) = P(Z \leq x) = P\big(\ln(X) \leq x\big) = P\left(X \leq \mathrm{e}^x\right)$.

On a donc :

$$\boxed{H(x) = F\left(\mathrm{e}^x\right)}$$

b) • Lorsque x est positif ou nul, alors : $F\left(\mathrm{e}^x\right) = 1 - \dfrac{1}{\left(\mathrm{e}^x\right)^c} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{cx}} = 1 - \mathrm{e}^{-cx}$.

• Lorsque x est strictement négatif, alors $F\left(\mathrm{e}^x\right) = 0$.

On en déduit $H(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-cx} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$, et comme $c > 0$, ceci montre que Z suit la loi exponentielle de paramètre c.

c) On peut proposer :

```
def simulX(c):
   Z=rd.exponential(1/c)
   X=np.exp(Z)
   return X
```