BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : EDHEC

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

28 avril 2025, de 14 h. à 18 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

On suppose, et c'est valable pour toute l'épreuve, que les librairies `numpy`, `numpy.random` et `numpy.linalg` de `Python` sont importées avec les commandes respectives `import numpy as np`, `import numpy.random as rd` et `import numpy.linalg as al`.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.
On considère la fonction f_n définie par :

$$\forall x \in [0,1],\ f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k\, x^k = x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + n\, x^n$$

1) a) Montrer que f_n est strictement croissante sur $[0,1]$.

b) En déduire que l'équation $f_n(x) = 1$, d'inconnue x, possède une seule solution, notée u_n, élément de $[0,1]$.

c) Donner la valeur de u_1.

2) a) Pour tout réel x de $[0,1]$, exprimer $f_{n+1}(x)$ en fonction de $f_n(x)$.

b) En déduire que $f_{n+1}(u_n) \geq 1$.

c) Utiliser les variations de f_{n+1} pour conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. On note ℓ sa limite.

3) a) Pour tout réel $x \neq 1$, rappeler la formule donnant $\sum_{k=0}^{n} x^k$ en fonction de x et n.

b) En déduire que, pour tout réel x différent de 1, on a l'égalité :

$$\sum_{k=1}^{n} k\, x^{k-1} = \frac{n\, x^{n+1} - (n+1)\, x^n + 1}{(1-x)^2}.$$

c) Donner alors une expression sans symbole Σ de $f_n(x)$ pour $x \in [0,1[$.

4) a) Déterminer u_2 puis en déduire que, si n est supérieur ou égal à 2, on a : $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$.

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n^n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n\, u_n^n$.

c) En revenant à la définition de u_n, montrer, pour $n \geq 2$, l'égalité :

$$u_n^2 - 3u_n + 1 = n\, u_n^{n+2} - (n+1)\, u_n^{n+1}.$$

d) Donner finalement la valeur de ℓ.

Exercice 2

On note E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & a \\ b & 2a-b & b \\ a & b & a \end{pmatrix}$, où a et b sont des réels.

1) a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) Donner une base de E et en déduire sa dimension.

2) Justifier sans calcul que les matrices de E sont diagonalisables mais pas inversibles.

Dans toute la suite, sauf la dernière question, on étudie un exemple.

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3) Vérifier que A appartient à E.

4) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `matA()` retournant la matrice A.

5) a) Quelle valeur propre de A la question 2) permet-elle d'obtenir ?

b) Montrer que les matrices $A-5I$ et $A+4I$ ne sont pas inversibles. En déduire deux autres valeurs propres de A.

c) Déterminer une base de chaque sous-espace propre de A puis construire une base (U,V,W) de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (on prendra pour chacun d'entre eux la première composante égale à 1).

6) On considère les instructions `Python` suivantes :

```
r1=al.matrix_rank(matA()-5*np.eye(3,3))
r2=al.matrix_rank(matA()+4*np.eye(3,3))
print('r1=',r1)
print('r2=',r2)
```

Utiliser la question précédente pour donner les valeurs de r_1 et r_2 renvoyées par ce script.

7) a) Vérifier que les vecteurs U, V et W sont vecteurs propres de toutes les matrices de E.

b) Soit n un entier naturel non nul. En utilisant la matrice P dont les colonnes sont les vecteurs U, V et W, indiquer comment obtenir la puissance n-ième de n'importe quelle matrice de E (seule la démarche est exigée, les calculs et leurs résultats numériques ne sont pas demandés).

c) En déduire, sans la commande `al.matrix_power`, et toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$, une fonction `Python` d'en-tête `puissanceM(a,b,n)` renvoyant $M(a,b)^n$.

Exercice 3

On suppose que les variables aléatoires présentées dans cet exercice sont toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Dans tout l'exercice, la lettre n désigne un entier naturel non nul.

1) Soit f_n la fonction définie par $f_n(x) = \begin{cases} \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^{n-1} & \text{si } 0 \leq x \leq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Vérifier que f_n est une densité.

Dans la suite, on considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires telle que, pour tout entier naturel n non nul, X_n admet f_n comme densité.

2) a) Justifier que $E\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)$ et $E\left(\left(1-\dfrac{X_n}{n}\right)^2\right)$ existent et donner leur expression en fonction de n.

b) En déduire que X_n possède une espérance et une variance et donner leur expression en fonction de n.

3) Déterminer la fonction de répartition F_n de X_n.

4) a) Donner, pour tout réel x strictement négatif, la limite de $F_n(x)$ quand n tend vers $+\infty$.

b) Soit x un réel positif. Montrer que, pour tout entier $n \geq \lfloor x \rfloor + 1$, on a :

$$F_n(x) = 1 - \left(1-\frac{x}{n}\right)^n$$

c) Pour tout réel x positif, calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1-\dfrac{x}{n}\right)$.

d) Déduire des questions précédentes que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable X dont on donnera la loi.

5) Soit $U_1,\dots,U_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, et suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On considère la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \min(U_1,\dots,U_n)$, ce qui signifie que, pour tout $\omega \in \Omega$, $M_n(\omega)$ est le plus petit des réels $U_1(\omega),\dots,U_n(\omega)$.

Enfin, on pose $Z_n = nM_n$.

a) En notant G la fonction de répartition commune à $U_1,...,U_n$, rappeler l'expression de $G(x)$ selon que $x<0$, $0\le x\le 1$ ou $x>1$.

b) Déterminer, pour tout réel x, la probabilité $P(Z_n > x)$ à l'aide de la fonction G et en déduire explicitement la fonction de répartition F_{Z_n} de Z_n.

c) Conclure que Z_n suit la même loi que X_n.

d) Utiliser la question 5c) pour écrire une fonction `Python` renvoyant une réalisation de X_n.

Problème

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul.
On dispose de $n+1$ urnes, numérotées de 1 à $n+1$, et contenant chacune n boules.
Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, l'urne numéro k contient $k-1$ boules noires, les autres boules étant blanches (ainsi, l'urne numérotée 1 ne contient que des boules blanches et l'urne numérotée $n+1$ ne contient que des boules noires).
L'épreuve consiste à choisir une urne au hasard et à y effectuer indéfiniment des tirages au hasard d'une boule, avec remise de la boule tirée dans l'urne dont elle provient après chaque tirage.
Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, on note U_k l'événement : « On a choisi l'urne numérotée k ».
On appelle X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 0 si l'on n'obtient aucune boule blanche au cours de l'épreuve et qui prend la valeur j ($j\in\mathbb{N}^*$) si la première boule blanche apparaît au $j^{\text{ième}}$ tirage.

Pour finir, on rappelle les commandes `Python` suivantes qui permettent de simuler certaines variables discrètes usuelles :
`rd.randint(a,b+1)` simule une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![a,b]\!]$.
`rd.binomial(n,p)` simule une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p.
`rd.geometric(p)` simule une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

1) Simulation de X_n : pour tout j de $[\![2,n+1]\!]$, on code les $j-1$ boules noires de l'urne numérotée j par les entiers de $[\![1,j-1]\!]$. Compléter alors la fonction `Python` suivante pour qu'elle renvoie la valeur prise par X_n lors de l'épreuve aléatoire décrite ci-dessus :

```
def varX(n):
    k=------# choix de l'urne
    if k==n+1:
        X=------
    elif k==1:
        X=------
    else:
        X=1
        while rd.randint(1,n+1)<=------:
            X=--------
    return(X)
```

2) Pour tout k de $[\![1,n+1]\!]$, déterminer $P(U_k)$.

3) a) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner la loi de X_n, conditionnellement à l'événement U_k.

b) En conservant, sans les écrire de nouveau, les 6 premières lignes de la fonction `Python` précédente, compléter les 3 lignes suivantes afin d'obtenir une nouvelle simulation de X_n :

```
else:
    X=-------
return(X)
```

4) a) Déterminer $P_{U_{n+1}}\left(X_n = 1\right)$.

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner $P_{U_k}\left(X_n = 1\right)$.

c) Montrer alors que $P(X_n = 1) = \frac{1}{2}$.

5) Soit j un entier supérieur ou égal à 2.

a) Déterminer $P_{U_{n+1}}\left(X_n = j\right)$.

b) Pour tout k de $[\![1,n]\!]$, donner $P_{U_k}\left(X_n = j\right)$.

c) En déduire l'égalité :

$$P\left(X_n = j\right) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right]$$

6) a) Justifier que, pour tout k de $[\![0,n-1]\!]$, on a : $\displaystyle\sum_{j=2}^{+\infty}\left[\left(\frac{k}{n}\right)^{j-1} - \left(\frac{k}{n}\right)^{j}\right] = \frac{k}{n}$.

b) Calculer $P\left(X_n \geq 2\right)$ en fonction de n.

7) a) Déduire des deux questions précédentes l'expression de $P\left(X_n = 0\right)$ en fonction de n.

b) Aurait-on pu anticiper ce dernier résultat sans aucun calcul ?

8) a) Montrer que X_n possède une espérance $E\left(X_n\right)$ donnée par :

$$E\left(X_n\right) = \frac{n}{n+1}\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$$

b) Informatique : calcul et affichage de $E\left(X_n\right)$.

Compléter le script suivant afin qu'il permette de calculer et d'afficher $E\left(X_n\right)$:

```
n=int(input('entrez la valeur de n :'))
v=np.arange(1,n+1)
E=------
print(E)
```

9) a) Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t \leq \frac{1}{p}$.

b) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, l'encadrement : $\displaystyle\sum_{p=2}^{n}\frac{1}{p} \leq \ln(n) \leq \sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p}$.

c) Établir enfin l'encadrement :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ \ln(n) + \frac{1}{n} \leq \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \leq \ln(n) + 1$$

d) Utiliser l'encadrement précédent pour donner l'équivalent le plus simple possible de $E\left(X_n\right)$ lorsque n est au voisinage de $+\infty$.